

Übungsaufgabe z. Th. Coulombfeld

Aufgabe 1

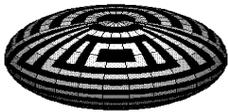
In einem zweidimensionalen Koordinatensystem sind die beiden gleich großen positiven Punktladungen Q_1 und Q_2 mit $Q_1 = Q_2 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ gegeben.

Die Ladung Q_1 befindet sich auf der negativen x-Achse in der Entfernung $a = 8 \text{ cm}$

vom Koordinatenursprung; die Ladung Q_2 ist ebenfalls $a = 8 \text{ cm}$ vom Koordinatenursprung entfernt, und zwar befindet sie sich auf der positiven x-Achse.

Auf der y-Achse ist eine dritte positive Ladung $Q_3 = 1,536 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ so positioniert, dass die Stärke des elektrischen Feldes, das durch die drei Ladungen verursacht wird, im Punkt P (0/6) den Wert Null annimmt

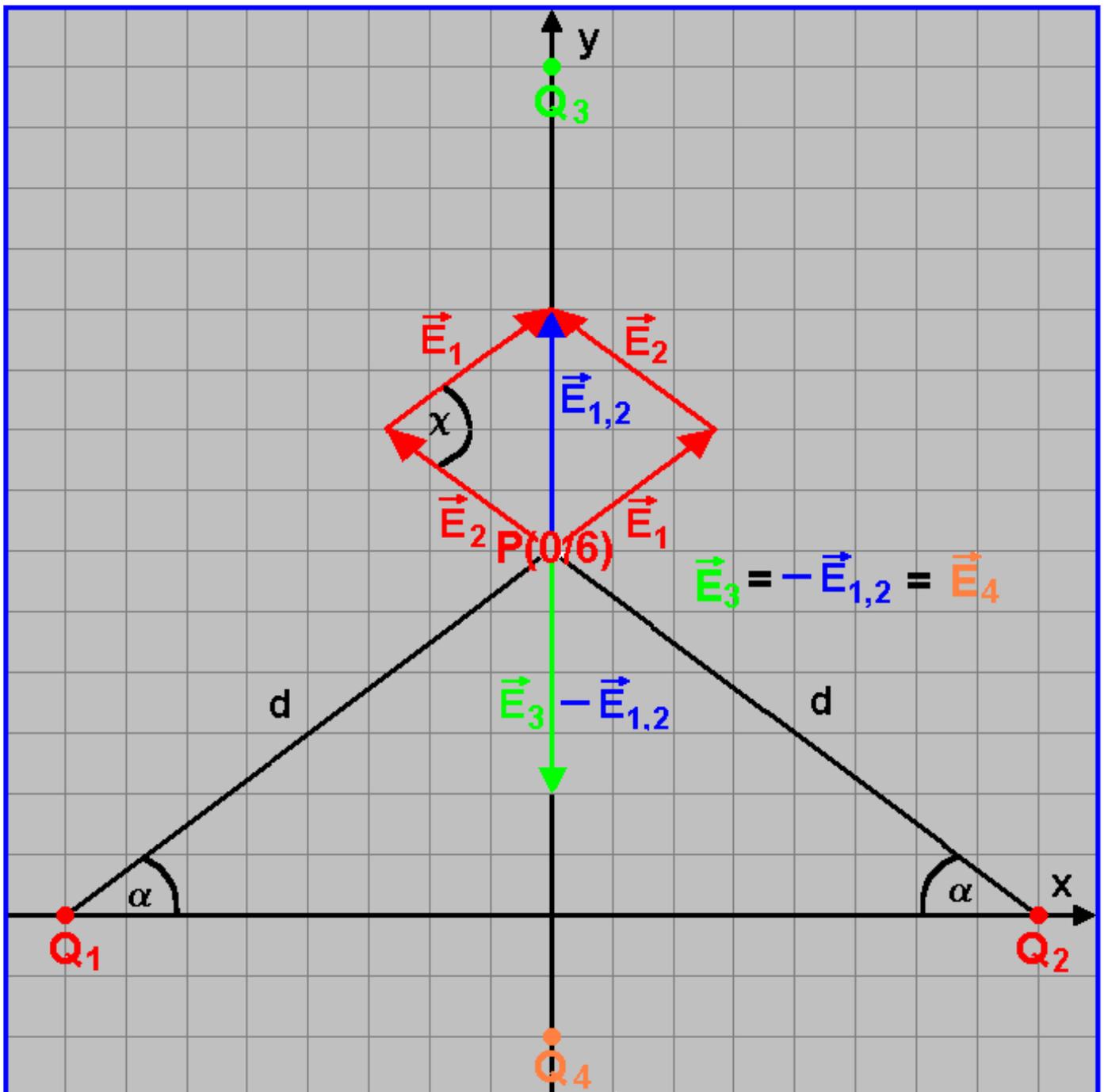
- a)** Fertigen Sie eine Skizze an. Zeichnen Sie zunächst in die Skizze die drei Punktladungen Q_1, Q_2, Q_3 und die zugehörigen Feldstärkevektoren $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ im Punkt P (0/6) ein. Zeichnen Sie ebenfalls die Winkel und Strecken in die Skizze, die Sie zur Berechnung der folgenden Teilaufgabe b) benötigen. Zeichnen Sie die Ladungen Q_4 und Q_5 die Skizze, wenn sie die weiteren Teilaufgaben bearbeiten.
- b)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P_3 in dem sich die Ladung Q_3 befindet. Runden Sie auf volle Zentimeter.
- c)** Die Ladung Q_3 wird aus dem Koordinatensystem entfernt durch eine Ladung Q_4 ersetzt, die sich im Punkt P_4 (0/ -2) auf der y- Achse befindet. Wie groß ist die Ladung Q_4 , wenn die Stärke des elektrischen Feldes, das nun von den drei Ladungen Q_1, Q_2 und Q_4 verursacht wird, wieder im Punkt P (0/6) den Wert Null annimmt ?
- d)** Die Ladung Q_3 wird wieder im Punkt P_3 in das Koordinatensystem eingefügt. Zusätzlich befindet sich im Koordinatenursprung die Ladung $Q_5 = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, so dass nun insgesamt fünf Ladungen im Koordinatensystem existieren. Berechnen Sie den Betrag der Kraft, die auf die Ladung Q_5 wirkt. Geben Sie die Richtung dieser Kraft an.
- e)** Die Ladung Q_5 wird nun vom Koordinatenursprung aus zum Punkt P (0/6) verschoben.
- 1)** Geben Sie den Betrag und die Richtung der Kraft an, die im Punkt P (0/6) auf die Ladung Q_5 wirkt.
 - 2)** Welche Energie wird für die Verschiebung der Ladung Q_5 vom Koordinatenursprung bis zum Punkt P (0/6) benötigt ?
Muß diese Energie dem System von außen zugeführt werden, oder wird diese Energie freigesetzt ?



L ö s u n g e n

a)

S k i z z e



- b) Die Feldstärke im Punkt P (0/6) ist die vektorielle Summe der Feldstärke der einzelnen Ladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 in diesem Punkt. Folglich gilt:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{0}$$

Da Q_1 und Q_2 von P (0/6) den selben Abstand d haben, gilt für die Beträge der

Feldstärken: $\left| \vec{E}_1 \right| = \left| \vec{E}_2 \right|$.

Für den Abstand d erhält man mit dem Satz des Pythagoras:

$$d = \sqrt{(6 \text{ cm})^2 + (8 \text{ cm})^2} = \sqrt{100 \text{ cm}^2} = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

Die beiden Ladungen Q_1 und Q_2 sind gleich groß; es gilt also: $Q_1 = Q_2 := Q_{1,2}$

Damit erhält man für den Betrag der beiden Feldstärken:

$$\left| \vec{E}_1 \right| = \left| \vec{E}_2 \right| = \frac{Q_{1,2}}{4 \pi \epsilon_0 d^2} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{4 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot (0,1 \text{ m})^2} = 17987 \frac{\text{V}}{\text{m}} := E$$

Aus der Zeichnung entnimmt man: $\sin \alpha = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \alpha = 36,87^\circ$

Außerdem gilt: $\chi = 2 \alpha = 73,74^\circ$

Den Betrag der Feldstärke $\left| \vec{E}_{1,2} \right| = \left| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right|$ läßt sich z. B. mit Hilfe

des Kosinussatzes bestimmen.

$$\left| \vec{E}_{1,2} \right| = \sqrt{\left| \vec{E}_1 \right|^2 + \left| \vec{E}_2 \right|^2 - 2 \cdot \left| \vec{E}_1 \right| \cdot \left| \vec{E}_2 \right| \cdot \cos \chi} \quad \text{mit} \quad \left| \vec{E}_1 \right| = \left| \vec{E}_2 \right| := E$$

folgt für den Betrag der Feldstärke $E_{1,2}$

$$\left| \vec{E}_{1,2} \right| = \sqrt{2 E^2 - 2 E^2 \cos \chi} = \sqrt{2 E^2 (1 - \cos \chi)} = E \cdot \sqrt{2 (1 - \cos \chi)}$$

$$\left| \vec{E}_{1,2} \right| = 17987 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \sqrt{2 (1 - \cos 73,74^\circ)} = 21584 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Die Feldstärke \vec{E}_3 der positiven Ladung Q_3 muß im Punkt P (0/6) den gleichen Betrag haben wie die Feldstärke $\vec{E}_{1,2}$. Sie ist dieser jedoch entgegengerichtet;

d.h. $\vec{E}_3 = -\vec{E}_{1,2}$.

$$\left| \vec{E}_{1,2} \right| = \frac{Q_3}{4 \pi \epsilon_0 r_3^2} \Leftrightarrow r_3 = \sqrt{\frac{Q_3}{4 \pi \epsilon_0 \left| \vec{E}_{1,2} \right|}}$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{1,536 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{4 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 21584 \frac{\text{V}}{\text{m}}}} = 7,999 \cdot 10^{-2} \text{ m} \approx 8 \text{ cm}$$



Fortsetzung von Aufgabe b

Die Ladung Q_3 ist 8 cm vom Punkt P (0/6) entfernt. Weil sie positiv ist, und die Richtung ihres Feldes im Punkt nach unten weist, muß sie sich auf der y-Achse oberhalb von P befinden.

Die Ladung Q_3 befindet sich also im Punkt $P_3 = (0/14)$.

- c) Die Ladung Q_4 befindet sich der gleichen Entfernung $d_4 = 8$ cm vom Punkt P (0/6) entfernt wie zuvor die Ladung Q_3 ; allerdings befindet sich Q_4 auf der y-Achse unterhalb von P (0/6).

Wenn die Feldstärke in P wieder den Wert Null annehmen soll, muß das von Q_4 verursachte Feld den gleichen Betrag und die gleiche Richtung haben wie zuvor das Feld der Ladung Q_3 . Dies ist nur möglich, wenn Q_4 den gleichen Betrag und das entgegengesetzte Vorzeichen von Q_3 hat.

Die Ladung Q_4 beträgt also: $Q_4 = -1,536 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

- d) Die elektrischen Felder \vec{E}_1 und \vec{E}_2 der Ladungen Q_1 und Q_2 haben im Koordinatenursprung den gleichen Betrag und die entgegengesetzte Richtung.

(Begründung: $Q_1 = Q_2 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ und $d_1 = d_2 := d = 8 \text{ cm}$)

Die Feldstärken von Q_1 und Q_2 heben sich im Koordinatenursprung auf.

Für die Kraft $\vec{F}_{(0/0)}$ auf die positive Ladung Q_5 sind also nur die beiden elektrischen Felder, der Ladungen Q_3 und Q_4 von Bedeutung.

Diese Kraft $\vec{F}_{(0/0)}$ ist nach unten gerichtet, weil die positive Ladung Q_3 die Ladung Q_5 abstößt und die negative Ladung Q_4 die Ladung Q_5 anzieht.

Für den Betrag der Kraft $\vec{F}_{(0/0)}$ gilt also:

$$\left| \vec{F}_{(0/0)} \right| = \left| \vec{F}_3 \right| + \left| \vec{F}_4 \right| = \left(\left| \vec{E}_3 \right| + \left| \vec{E}_4 \right| \right) \cdot Q_5 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \left(\frac{|Q_3|}{r_{3,5}^2} + \frac{|Q_4|}{r_{4,5}^2} \right) \cdot Q_5$$

mit $r_{3,5} = 0,14 \text{ m}$ und $r_{4,5} = 0,02 \text{ m}$ folgt:

$$\left| \vec{F}_{(0/0)} \right| = \frac{1}{4 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}} \cdot \left(\frac{1,536 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{(0,14 \text{ m})^2} + \frac{1,536 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{(0,02 \text{ m})^2} \right) \cdot 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

$$\left| \vec{F}_{(0/0)} \right| = 1,409 \text{ N}$$

Auf die Ladung Q_5 wirkt im Koordinatenursprung die Kraft

$\vec{F}_{(0/0)} = 1,409 \cdot 10^{-4} \text{ N}$. Diese Kraft ist nach unten gerichtet.



e) 1) $\vec{F}_{(0/6)} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4) \cdot Q_5$

Nach Teilaufgabe a) gilt: $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{0}$

Damit folgt für den Betrag der Kraft $\vec{F}_{(0/6)}$:

$$\left| \vec{F}_{(0/6)} \right| = \left| \vec{E}_4 \right| \cdot \left| Q_5 \right| = \frac{\left| Q_4 \right| \cdot \left| Q_5 \right|}{4 \pi \cdot \epsilon_0 \cdot d_{(0/6)}^2} \quad \text{Mit } d_{(0/6)} = 8 \text{ cm folgt:}$$

$$\left| \vec{F}_{(0/6)} \right| = \frac{1,536 \cdot 10^{-8} \text{ C} \cdot 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{4 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{Vm}} \cdot (0,08 \text{ m})^2} = 8,632 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Weil Q_4 negativ ist, wird Q_5 von Q_4 angezogen.

Im Punkt P (0/6) wirkt auf die Ladung Q_5 die

nach unten gerichtete Kraft $\vec{F}_{(0/6)} = 8,632 \cdot 10^{-6} \text{ N}$.

e) 2) Berechnung des Gesamtpotentials $\phi_{\text{ges,U}}$ im Koordinatenursprung U

$$\phi_{\text{ges,U}} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$$

(Da das Potential eine skalare Größe ist werden die Einzelpotentiale algebraisch addiert.)

$$\phi_{\text{ges,U}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{r_{1,U}} + \frac{Q_2}{r_{2,U}} + \frac{Q_3}{r_{3,U}} + \frac{Q_4}{r_{4,U}} \right)$$

$$\phi_{\text{ges,U}} \approx -5470 \text{ V}$$

Berechnung des Gesamtpotentials $\phi_{\text{ges,P}}$ im Punkt P (0/6)

$$\phi_{\text{ges,P}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{r_{1,P}} + \frac{Q_2}{r_{2,P}} + \frac{Q_3}{r_{3,P}} + \frac{Q_4}{r_{4,P}} \right)$$

$$\phi_{\text{ges,P}} = \frac{1}{4 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{Vm}}} \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{0,1 \text{ m}} + \frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{0, \text{ m}} + \frac{1,536 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{0,08 \text{ m}} - \frac{1,536 \cdot 10^{-8} \text{ C}}{0,08 \text{ m}} \right)$$

$$\phi_{\text{ges,P}} = \frac{1}{4 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{Vm}}} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{0,1 \text{ m}} \approx 360 \text{ V}$$

Für die zu verrichtende Arbeit gilt:

$$W_{U,P} = \left(\phi_{\text{ges,P}} - \phi_{\text{ges,U}} \right) \cdot Q_5 = \left(360 \text{ V} - (-5470 \text{ V}) \right) \cdot 4 \cdot 10^{-10} \text{ C} = 2,332 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Um die Ladung Q_5 vom Koordinatenursprung zum Punkt P (0/6) zu bringen, muß dem system die Energie $W_{U,P} = 2,332 \cdot 10^6 \text{ J}$ zugeführt werden.

