Übungsarbeit zum Thema: Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

1a) Bestimme die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a \in R^+$, deren Graph durch den Punkt $P(3 / 0{,}343)$ verläuft.

b) Bestimme die Exponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ mit $a \in R^+$, $b \in R$, deren Graph durch die Punkte $P_1(0{,}5 / 0{,}3125)$ und $P_2(2 / 4{,}8828125)$ verläuft.

c) Bestimme die Exponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ mit $a \in R^+$, $b \in R$, deren Graph durch die Punkte $P_1(-4 / 0{,}375)$ und $P_2(0 / 3)$ verläuft.

2a) Bei welchem jährlichen Zinssatz würde ein Kapital in 6 Jahren um 50 % anwachsen ? (Runde auf volle Prozent!)

b) Nach welcher Zeit wäre das Kapital doppelt so groß wie das Anfangskapital ? (Runde auf ein Viertel Jahr genau !)

c) Nach welcher Zeit wäre das Kapital 8-mal so groß wie das Anfangskapital ?

d) Wie groß war das Anfangskapital, wenn 14 Jahre später der Kontostand 31845 € beträgt ? (Runde auf volle € !)

3a) Ein Anfangskapital von 40000 € soll in 12 Jahren auf 69800 € anwachsen.
Berechne den Zinssatz ! (Runde auf volle hundertstel Prozent !)

b) Wie groß wäre das Entkapital nach 24 Jahren ?

4a) Wie lange dauert es, bis ein Anfangskapital von 16000 € bei einem Zinssatz von 3,5 % auf das Kapital 22570 € angewachsen ist ?
(Runde auf volle Jahre !)

b) Nach welcher Zeit hätte sich das Anfangskapital
1) verdoppelt ? 2) verdreifacht ? 3) vervierfacht ?

---

5) Eine Braunalge verdoppelt alle fünf Tage ihre Höhe.

a) Berechne den "Wachstumsfaktor α" in der Einheit $\frac{1}{h}$.
Runde auf 4 gültige Ziffern.

b) Zu Beginn der Betrachtung ist die Braunalge 80 cm hoch. Das Wasser ist an der Stelle 25 m tief.
Wie lange dauert es, bis die Braunalge an die Wasseroberfläche gelangt ?
(Runde auf volle Stunden. Gib die Zeit in vollen Tagen und Stunden an !)

6) Die vom Radium ausgehende β-Strahlung hat nnach dem Durchdringen einer 6,7 mm dicken Aluminiumplatte 99% ihrer ursprünglichen Intensität verloren.

a) Berechne die Halbwertsdicke von Aluminium bezüglich dieser β-Strahlung.

b) Ersetzt man die Aluminiumplatte durch eine 0,24 mm dicke Bleiplatte, so ist hinter dieser Bleiplatte noch 50% der ursprünglichen Strahlungsintensität nachweisbar.
Wie dick müßte die Bleiplatte sein,damit sie ebenfalls 99% der ursprünglichen Strahlung absorbiert ?

—

7) Das Plutoniumisotop ${}^{241}_{94}\mathrm{Pu}$ dient aufgrund seiner geringen kritischen Masse zur Herstellung leichter taktischer Kernwaffen. Seine Halbwertszeit beträgt 13 Jahre. Die mit solchen Sprengsätzen versehenen Waffen müssen etwa alle 2 Jahre aufbereitet werden, um sie von den inzwischen entstandenen und störenden Zerfallsprodukten zu befreien.
Wieviel Prozent des Nuklids ${}^{241}_{94}\mathrm{Pu}$ sind nach zwei Jahren zerfallen ?

—

8) Von einer radioaktiven Substanz sind nach 30 Tagen nur noch ein Viertel der ursprünglichen Atomkerne vorhanden.

a) Bestimme die Zerfallskonstante α_e in der Einheit h^{-1}.

b) Welche Zerfallskonstante α_{10} ergibt sich, wenn man für das Zerfallsgesetz statt der Basis e die Basis 10 benutzt ?

c) Zur Zeit t = 0 sind von der radioaktiven Substanz $N_0 = 7{,}5 \cdot 10^{24}$ Kerne vorhanden.
Berechne mit dem Zerfallsgesetzt zur Basis e und dem Zerfallsgesetz zur Basis 10 die Anzahl N der Kerne, die noch nach 200 h vorhanden sind.

—

9) Löse die folgenden Gleichungen durch Substitution.

a) $8x^4 - 490x^2 + 4802 = 0$

b) $14x^2 + 21x - 42 + \dfrac{14}{2x^2 + 3x - 6} = 53$

c) $5x^6 - 4x^3 = 352$

d) $6x^2 - 12x + 27 + \sqrt{32x^2 - 64x + 144} = 95$

e) $33614 \cdot 7^{3x+1} - 2 \cdot 7^{-(3x+2)} = 16$

f) $8^x + 64^{x+1} + 2^{3x+2} = 4136$

g) $\log_5 (x+4)^2 + \log_5 (x+4) = 15$

h) $\log_8 \dfrac{2x-3}{x+6} - \log_8 \dfrac{x+6}{2x-3} = 4$

10) Fasse erst geschickt zusammen und löse dann.

a) $7^{2x+1} - 11^{x+1} = 7^{2x} + 11^{x}$

b) $3^{x-1} + 3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x-1} + 5^{x+2}$

c) $7^{x^2-9} = 5^{x+4} + 125 \cdot 5^{x+2} - 29 \cdot 5^{x+3}$

d) $7^{x+2} - 9^{2x-3} = -343^{x+1} + 3^{4x-1}$

IMMER GANZ
COOL
BLEIBEN
Mathe. ist doch
TURBO-EASY

L ö s u n g e n

1a) $a^3 = 0{,}343$

$a = \sqrt[3]{0{,}343} = 0{,}7$

Die Exponentialfunktion lautet: $\underline{\underline{f(x) = 0{,}7^x}}$

1b)

$b \cdot a^{0{,}5} = 0{,}3125 \qquad (*)$

$b \cdot a^2 = 4{,}8828125$

$\lg b + 0{,}5 \cdot \lg a = \lg 0{,}1325$

$\lg b + 2 \cdot \lg a = \lg 4{,}8828125$

$1{,}5 \cdot \lg a = \lg 4{,}8828125 - \lg 0{,}3125$

$\lg a = \dfrac{\lg 4{,}8828125 - \lg 0{,}3125}{1{,}5}$

$\lg a = 0{,}795880017$

$a = 6{,}25$ in $(*)$

$b \cdot 6{,}25^{0{,}5} = 0{,}3125$

$b \cdot 2{,}5 = 0{,}3125$

$b = 0{,}125$

Die Exponentialfunktion lautet: $\underline{\underline{f(x) = 0{,}125 \cdot 6{,}25^x}}$

1c) $b \cdot a^{-4} = 0{,}75$

$b \cdot a^0 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad b = 3$, weil $a^0 = 1$ ist.

$3 \cdot a^{-4} = 0{,}75 \quad \Leftrightarrow \quad a^{-4} = 0{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a^4} = 0{,}25$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}25\, a^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^4 = 4$

$\Leftrightarrow \quad a^2 = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

Da die Exponentialfunktion nur für positive Basen definiert ist,
gilt: $a = +\sqrt{2}$

Die gesuchte Exponentialfunktion ist: $\underline{\underline{f(x) = 3 \cdot (\sqrt{2})^x}}$

2a) $K_n = K_0 (1 + \frac{p}{100})^n$ mit $K_n = 1{,}5 \cdot K_0$ und $n = 6$ $\Rightarrow$

$$1{,}5 \cdot K_0 = K_0 (1 + \frac{p}{100})^6 \Leftrightarrow 1{,}5 = (1 + \frac{p}{100})^6 \Leftrightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[6]{1{,}5} \Leftrightarrow$$

$$p = \left(\sqrt[6]{1{,}5} - 1\right) \cdot 100 = 7$$

Der Zinssatz beträgt $\underline{\underline{7\ \%}}$.

2b) Mit $K_n = 2\,K_0$ folgt:

$(1 + \frac{p}{100})^n = 2$ mit $p = 7$ folgt:

$$1{,}07^n = 2 \Leftrightarrow n \cdot \lg 1{,}07 = \lg 2 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}07} \approx 10{,}24 \approx 10{,}25 = 10\frac{1}{4}$$

Nach $\underline{\underline{10\frac{1}{4}\ \text{Jahren}}}$ hätte sich das Anfangskapital verdoppelt.

2c) Nach der dreifachen Verdoppelungszeit hätte sich das Anfangskapital verachtfacht.

Diese Zeit beträgt $\underline{\underline{30\frac{3}{4}\ \text{Jahre}}}$.

2d) $K_n = K_0 (1 + \frac{p}{100})^n \Leftrightarrow K_0 = \dfrac{K_n}{(1 + \frac{p}{100})^n} \Leftrightarrow$

$$K_0 = \frac{38145\ €}{1{,}07^{14}} = 12350\ €$$

Das Anfangskapital betrug $\underline{\underline{12350\ €}}$.

3a) $K_n = K_0 (1 + \frac{p}{100})^n \Leftrightarrow (1 + \frac{p}{100})^n = \dfrac{K_n}{K_0} \Leftrightarrow$

$$P = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right) \cdot 100 \Leftrightarrow$$

$$P = \left(\sqrt[12]{\frac{69800}{40000}} - 1\right) \cdot 100 \approx 4{,}75$$

Der Zinssatz beträgt $\underline{\underline{4{,}75\ \%}}$.

3b) **<u>1. Lösung</u>**

$$K_{24} = K_0 \cdot \left(\frac{K_{12}}{K_0}\right)^2 = \frac{K_{12}^2}{K_0} = \frac{69800^2}{40000}\ € = 121801\ €$$

Das Anfangskapital würde nach 24 Jahren $\underline{\underline{121801\ €}}$ betragen.

3b) 2.Lösung

Benutzt man die Formel $K_n = K_0 (1 + \frac{p}{100})^n$ mit dem ganz genauen Zinssatz, so erhält man das gleiche Ergebnis.

$$K_{24} = 40000\,€ \cdot (1{,}047489358)^{24} = 121801\,€$$

Das Anfangskapital würde nach 24 Jahren $\underline{\underline{121801\,€}}$ betragen.

4a) $K_0 \cdot 1{,}035^n = K_n \Leftrightarrow 1{,}035^n = \frac{K_n}{K_0} \Leftrightarrow$

$$n \cdot \lg 1{,}035 = \lg K_n - \lg K_0 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{\lg K_n - \lg K_0}{\lg 1{,}035} = \frac{\lg 22570 - \lg 16000}{\lg 1{,}035} = 10$$

Die Zeit beträgt $\underline{\underline{10 \text{ Jahre}}}$.

4b) 1) Mit $K_n = 2\,K_0$ und $p = 3{,}5\,\%$ folgt

$$1{,}035^n = 2 \Leftrightarrow n \cdot \lg 1{,}035 = \lg 2 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}035} \approx 20$$

Das Kapital verdoppelt sich in $\underline{\underline{20 \text{ Jahren}}}$.

4b) 2) $n = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}035} \approx 32$

Das Kapital verdreifacht sich in $\underline{\underline{32 \text{ Jahren}}}$.

4b) 3) Es ist die zweifache Verdoppelungszeit vergangen.

Das Kapital vervierfacht sich in $\underline{\underline{40 \text{ Jahren}}}$.

5a) $x :=$ Höhe der Braunalge, $T := 5 \text{ Tage} = 120\,h$

$$2\,x_0 = x_0 \cdot e^{\alpha T} \Leftrightarrow e^{\alpha T} = 2 \Leftrightarrow \ln e^{\alpha T} = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{120\,h} = 5{,}776 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{h}$$

Die Wachstumskonstante beträgt $\underline{\underline{\alpha = 5{,}776 \cdot 10^{-3}\,h^{-1}}}$.

5b) $x = x_0 \cdot e^{\alpha T} \Leftrightarrow \alpha \cdot t = \ln x - \ln x_0 \Leftrightarrow$

$$t = \frac{\ln x - \ln x_0}{\alpha} = \frac{\ln 25 - \ln 8}{5{,}776 \cdot 10^{-3}\,h^{-1}} = 596\,h$$

$$t = 24\,d\ \ 20\,h$$

Die Braunalge gelangt nach $\underline{\underline{24 \text{ Tagen und } 20 \text{ Stunden}}}$ an die Wasseroberfläche.

6a) $I :=$ Intensität

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha d} \quad \text{mit} \quad I = \frac{1}{100} I_0 \quad \text{folgt:}$$

$$e^{\alpha d} = \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot d = -\ln 0{,}01 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -\frac{\ln 0{,}01}{d} = -\frac{\ln 0{,}01}{6{,}7\ \text{mm}} = 0{,}687338834\ \text{mm}^{-1}$$

$d_H :=$ Halbstwertsdicke

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha d_H} \quad \text{mit} \quad I = 0{,}5\, I_0 \quad \text{folgt:}$$

$$e^{-\alpha d_H} = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \cdot d_H = \ln 0{,}5 \quad \Leftrightarrow$$

$$d_H = -\frac{\ln 0{,}5}{\alpha} = -\frac{\ln 0{,}5}{0{,}687338834}\ \text{mm} = 1{,}008\ \text{mm}$$

Die Halbwertsdicke des Aluminiums beträgt $\underline{\underline{1{,}008\ \text{mm}}}$.

6b)

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha d} \quad \text{mit} \quad I = 0{,}5\, I_0 \quad \text{folgt:}$$

$$e^{-\alpha d} = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \cdot d = \ln 0{,}5 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -\frac{\ln 0{,}5}{d} = -\frac{\ln 0{,}5}{0{,}24\ \text{mm}} = 2{,}888113252\ \text{mm}^{-1}$$

$$\text{Mit } I = \frac{1}{100} I_0 \quad \text{folgt} \quad -\alpha \cdot d = \ln 0{,}01 \quad \Leftrightarrow$$

$$d = -\frac{\ln 0{,}01}{\alpha} = -\frac{\ln 0{,}01}{2{,}888113252}\ \text{mm} = 1{,}595\ \text{mm}$$

Die Bleiplatte müßte $\underline{\underline{1{,}595\ \text{mm}}}$ dick sein.

7)

$$N = N_0 \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{mit} \quad N = \frac{1}{2} N_0 \quad \text{und} \quad t = 13\ \text{a} \quad \text{folgt:}$$

$$e^{-\alpha t} = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \cdot t = \ln 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{\ln 0{,}5}{t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -\frac{\ln 0{,}5}{13\ \text{a}} = 0{,}053319014\ \text{a}^{-1}$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-0{,}053319014 \cdot \frac{1}{\text{a}} \cdot 2\ \text{a}} \approx 0{,}8988 = 89{,}88\ \% \approx 90\ \%$$

Nach zwei Jahren sind ca. $\underline{\underline{10\ \%}}$ des Plutoniumisotops zerfallen.

8a) $N = N_0 \cdot e^{-\alpha_e \cdot t}$ mit $N = 0{,}25\,N_0$ und $t = 720\,h$ folgt:

$$-\alpha_e \cdot t = \ln 0{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_e = -\frac{\ln 0{,}5}{t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha_e = -\frac{\ln 0{,}5}{720\,h} = 9{,}262704 \cdot 10^{-4}\,h^{-1}$$

Die Substanz hat die Zerfallskonstante $\underline{\underline{\alpha_e = 9{,}262704 \cdot 10^{-4}\,h^{-1}}}$.

8b) $N = N_0 \cdot e^{-\alpha_{10}\,t}$

$$\alpha_{10} = -\frac{\lg 0{,}5}{720\,h} = 4{,}18097 \cdot 10^{-4}\,h^{-1}$$

Benutzt man für das Zerfallsgesetz die Basis 10, so erhält man für die radioaktive Substanz die Zerfallskonstante $\underline{\underline{\alpha_{10} = 4{,}18097 \cdot 10^{-4}\,h^{-1}}}$.

8c) $N = N_0 \cdot e^{-\alpha_e \cdot t}$

$$N = 7{,}5 \cdot 10^{24} \cdot e^{-9{,}262704 \cdot 10^{-4}\,h^{-1} \cdot 200\,h} = 6{,}232 \cdot 10^{24}$$

Nach 200 Stunden sind noch $\underline{\underline{6{,}232 \cdot 10^{24}\ \text{Kerne}}}$ vorhanden.

$$N = N_0 \cdot e^{-\alpha_{10}\,t}$$

$$N = 7{,}5 \cdot 10^{24} \cdot 10^{4{,}18097 \cdot 10^{-4}\,h^{-1} \cdot 200\,h} = 6{,}186 \cdot 10^{24}$$

Nach 200 Stunden sind noch $\underline{\underline{6{,}186 \cdot 10^{24}\ \text{Kerne}}}$ vorhanden.

Die Ergebnisse stimmen bis auf Rundungsfehler überein, weil man den "Exponentiellen Zerfall" durch eine Exponentialfunktion mit beliebiger Basis beschreiben kann.

9a) $8x^4 - 490x^2 + 4802 = 0$ **Setze $x^2 = u$**

$$8u^2 - 490u + 4802 = 0$$

$$u^2 - \frac{245}{4}u = -\frac{2401}{4}$$

$$u^2 - \frac{245}{4} + \frac{60025}{64} = -\frac{38416}{64} + \frac{60025}{64}$$

$$\left(u - \frac{245}{8}\right)^2 = \pm\frac{147}{8}$$

$$u_1 = \frac{392}{8} = 49$$

$$u_2 = \frac{98}{8} = 12{,}25$$

Macht man nun die Substitution $x^2 = u$ wieder rückgängig, dann gilt:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{u_1} = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{u_2} = \pm\sqrt{12{,}25} = \pm 3{,}5$$

$$\underline{\underline{L = \left\{-3{,}5;\ 3{,}5;\ -7;\ 7\right\}}}$$

9b)

$$14\,x^2 + 21\,x - 42 + \frac{8}{2\,x^2 + 3\,x - 6} = 57$$

$$7\,(2\,x^2 + 3\,x - 6) + \frac{8}{2\,x^2 + 3\,x - 6} = 57$$

Setze $2\,x^2 - 3\,x - 6 = u$

$$7\,u + \frac{8}{u} = 57$$

$$7\,u^2 + 8 = 57\,u$$

$$7\,u^2 - 57\,u = -8$$

$$u^2 - \frac{57}{7}\,u = -\frac{8}{7}$$

$$\left(u - \frac{57}{14}\right)^2 = \frac{3025}{196}$$

$$u - \frac{57}{14} = \pm\frac{55}{14}$$

$$u_1 = \frac{112}{14} = 8$$

$$u_2 = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

Durch "Rückgängigmachen" der Substitution erhält man:

$$2\,x^2 + 3\,x - 6 = 8$$

$$2\,x^2 + 3\,x = 14$$

$$x^2 + \frac{3}{2}\,x = 7$$

$$x^2 + \frac{3}{2}\,x + \frac{9}{16} = \frac{121}{16}$$

$$x + \frac{3}{4} = \pm\frac{11}{4}$$

$$x_1 = -\frac{14}{4} = -3{,}5$$

$$x_2 = \frac{8}{4} = 2$$

$$2\,x^2 + 3\,x - 6 = \frac{1}{7}$$

$$2\,x^2 + 3\,x = \frac{43}{7}$$

$$x^2 + \frac{3}{2}\,x = \frac{43}{14}$$

$$x^2 + \frac{3}{2}\,x + \frac{9}{16} = \frac{407}{112}$$

$$x + \frac{3}{4} = \pm 1{,}906286592$$

$$x_3 \approx 0{,}11563$$

$$x_4 \approx -2{,}6563$$

$$\underline{\underline{L = \left\{-3{,}5;\; -2{,}6563;\; 0{,}11563;\; 2\right\}}}$$

9c)

$$
\begin{aligned}
5x^6 - 4x^3 &= 352 \qquad \textbf{Setze } \mathbf{x^3 = u}\\
5u^2 - 4u &= 352\\
u^2 - \frac{4}{5}u &= \frac{352}{5}\\
u^2 - \frac{4}{5}u + \frac{4}{25} &= \frac{1760}{25} + \frac{4}{25}\\
\left(u - \frac{2}{5}\right)^2 &= \frac{1764}{25}\\
u - \frac{2}{5} &= \pm\frac{42}{5}\\
u_1 &= \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5}\\
u_2 &= -\frac{40}{5} = -8
\end{aligned}
$$

Durch "Rückgängigmachen" der Substitution erhält man.

$$
\begin{aligned}
x_1^3 &= \frac{44}{5} \iff x_1 = \sqrt[3]{\frac{44}{5}} \iff x_1 \approx 2{,}06456\\
x_2^3 &= -8 \iff x_2 = \sqrt[3]{-8} \iff x_2 = -2
\end{aligned}
$$

$$\underline{\underline{L = \left\{-2;\ 2{,}06456\right\}}}$$

9d)

$$
\begin{aligned}
6x^2 - 12x + 27 + \sqrt{32x^2 - 64x + 144} &= 95\\
3(2x^2 - 4x + 9) + \sqrt{16(2x^2 - 4x + 9)} &= 95\\
3(2x^2 - 4x + 9) + 4\sqrt{2x^2 - 4x + 9} &= 95
\end{aligned}
$$

$$\textbf{Setze } \mathbf{2x^2 - 4x + 9 = u}$$

$$
\begin{aligned}
3u + 4\sqrt{u} &= 95\\
3u - 95 &= -4\sqrt{u}\\
9u^2 - 570u + 9025 &= 16u\\
9u^2 - 586u &= -9025\\
u^2 - \frac{586}{9}u &= -\frac{9025}{9}\\
u^2 - \frac{586}{9}u + \frac{85849}{81} &= \frac{4624}{81}\\
u - \frac{293}{9} &= \pm\frac{68}{9}\\
u_1 &= \frac{361}{9} = 40\frac{1}{9}\\
u_2 &= \frac{225}{9} = 25
\end{aligned}
$$

Fortsetzung von Aufgabe 9d

Durch "Rückgängigmachen" der Substitution erhält man:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 9 &= \frac{361}{9} \\ x^2 - 2x + 4\frac{1}{2} &= \frac{361}{18} \\ x^2 - 2x &= 15\frac{5}{9} \\ x^2 - 2x + 1 &= 16\frac{5}{9} \\ x - 1 &\approx \pm 4{,}06885 \\ x_1 &= 5{,}06885 \\ x_2 &= -3{,}06885 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 9 &= 25 \\ 2x^2 - 4x &= 16 \\ x^2 - 2x &= 8 \\ x^2 - 2x + 1 &= 9 \\ x - 1 &= \pm 3 \\ x_3 &= 4 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{ -3{,}06885;\ -2;\ 4;\ 5{,}06885 \right\}}}$$

9e)

$$\begin{aligned} 33614 \cdot 7^{3x+1} - 2 \cdot 7^{-(3x+2)} &= -4800 \\ 33614 \cdot 7^{3x+1} - \frac{2}{7^{3x+2}} &= -4800 \\ 33614 \cdot 7^{3x+1} - \frac{2}{7 \cdot 7^{3x+1}} &= -4800 \qquad \textbf{Setze } \mathbf{7^{3x+1} = u} \\ 33614 \cdot u - \frac{2}{7u} &= -4800 \\ 33614 \cdot u^2 - \frac{2}{7} &= -4800\,u \\ 33614\,u^2 + 4800\,u &= \frac{2}{7} \\ u^2 + \frac{2400}{16807}\,u &= \frac{2}{235298} \\ u^2 + \frac{2400}{16807}\,u + \frac{1440000}{282475249} &= \frac{1442401}{282475249} \\ u + \frac{1200}{16807} &= \pm\frac{1201}{16807} \\ u_1 &= \frac{1}{16807} \\ u_2 &= -\frac{2401}{16807} = -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

Fortsetzung von Aufgabe 9e

Durch "Rückgängigmachen" der Substitution erhält man:

$$7^{3x_1+1} = \frac{1}{16807}$$

$$(3x_1 + 1)\ln 7 = \ln\frac{1}{16807}$$

$$(3x_1 + 1)\ln 7 = -\ln 16807$$

$$3x_1 + 1 = -\frac{\ln 16807}{\ln 7}$$

$$x_1 = -\left(\frac{\ln 16807}{\ln 7} + 1\right)\cdot\frac{1}{3} = -2$$

$$7^{3x_2+1} = -\frac{1}{7}$$

$$(3x_2 + 1)\ln 7 = \ln\left(-\frac{1}{7}\right) \qquad \textbf{(nicht definiert)}$$

Also ist $x_1 = -2$ die einzige Lösung. $\qquad \underline{\underline{L = \{-2\}}}$

9f)

$$8^x + 64^{x+1} + 2^{3x+2} = 4136$$

$$8^x + 64\cdot 64^x + 4\cdot 2^{3x} = 4136$$

$$8^x + 64\cdot 8^{2x} + 4\cdot 8^x = 4136$$

$$64\cdot 8^{2x} + 5\cdot 8^x = 4136 \qquad \textbf{Setze } \mathbf{8^x = u}$$

$$64u^2 + 5u = 4136$$

$$u^2 + \frac{5}{64}u = \frac{517}{8}$$

$$u^2 + \frac{5}{64}u + \frac{25}{16384} = \frac{1058841}{16384}$$

$$u + \frac{5}{128} = \pm\frac{1029}{128}$$

$$u_1 = \frac{1024}{128} = 8$$

$$u_2 = -\frac{1034}{128} = -8\frac{5}{64}$$

Durch "Rückgängigmachen" der Substitution erhält man:

$$8^{x_1} = 8 \iff x_1 = 3 \quad \text{und}$$

$$8^{x_2} = -8\frac{5}{64} \iff x\ln 8 = \ln\left(-8\frac{5}{64}\right) \qquad \textbf{(nicht definiert)}$$

Also ist $x_1 = 3$ die einzige Lösung. $\qquad \underline{\underline{L = \{3\}}}$

9g) $\log_5 (x+4)^2 + \log_5 (x+4) = 15$ **Setze** $\mathbf{x+4 = u}$

$$\log_5 u^2 + \log_5 u = 15$$
$$2\log_5 u + \log_5 u = 15$$
$$3\log_5 u = 15$$
$$\log_5 u = 5$$
$$u = 5^5 = 3125$$

Durch "Rückgängigmachen" der Substitution erhält man:

$$x + 4 = 3125 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3121 \qquad \underline{\underline{L = \left\{3121\right\}}}$$

9h) $\log_8 \frac{2x-3}{x+6} - \log_8 \frac{x+6}{2x-3} = 4$ **Setze** $\mathbf{\frac{2x-3}{x+6} = u}$

$$\log_8 u - \log_8 \frac{1}{u} = 4$$

mit $\log_8 \frac{1}{u} = -\log_8 u$ bzw. $-\log_8 \frac{1}{u} = \log_8 \frac{1}{u}$ folgt

$$\log_8 u + \log_8 u = 4$$
$$2\log_8 u = 4$$
$$\log_8 u = 2$$
$$u = 8^2 = 64$$

Durch "Rückgängigmachen der Substitution erhält man:

$$\frac{2x-3}{x+6} = 64 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3 = 64x + 384 \quad \Leftrightarrow \quad -62x = 387 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{387}{62} = -6\frac{15}{62} \qquad \underline{\underline{L = \left\{-6\frac{15}{62}\right\}}}$$

10a)

$$7^{2x+1} - 11^{x+1} = 7^{2x} + 11^x$$
$$7^{2x+1} - 7^{2x} = 11^x + 11^{x+1}$$
$$7 \cdot 7^{2x} - 7^{2x} = 11^x + 11 \cdot 11^x$$
$$6 \cdot 7^{2x} = 12 \cdot 11^x$$
$$\ln 6 + 2x \ln 7 = \ln 12 + x \ln 11$$
$$2x \ln 7 - x \ln 11 = \ln 12 - \ln 6$$
$$x(2\ln 7 - \ln 11) = \ln 2$$
$$x = \frac{\ln 2}{2\ln 7 - \ln 11} \approx 0{,}46398 \qquad \underline{\underline{L = \left\{0{,}46398\right\}}}$$

10b)

$$
\begin{aligned}
3^{x-1} + 3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} &= 5^{x-1} + 5^{x+2} \\
3^{x-1} + 3 \cdot 3^{x-1} + 9 \cdot 3^{x-1} + 27 \cdot 3^{x-1} &= 5^{x-1} + 125 \cdot 5^{x-1} \\
40 \cdot 3^{x-1} &= 126 \cdot 5^{x-1} \\
\ln 40 + (x-1)\ln 3 &= \ln 126 + (x-1)\ln 5 \\
\ln 40 + x\ln 3 - \ln 3 &= \ln 126 + x\ln 5 - \ln 5 \\
x\ln 3 - x\ln 5 &= \ln 126 - \ln 5 - \ln 40 + \ln 3 \\
x(\ln 3 - \ln 5) &= \ln 126 - \ln 5 - \ln 40 + \ln 3 \\
x &= \frac{\ln 126 - \ln 5 - \ln 40 + \ln 3}{\ln 3 - \ln 5} \\
x &= -1{,}24617 \\
L &= \left\{ -1{,}24617 \right\}
\end{aligned}
$$

10c)

$$
\begin{aligned}
7^{x^2-9} &= 5^{x+4} + 125 \cdot 5^{x+2} - 29 \cdot 5^{x+3} \\
7^{x^2-9} &= 5 \cdot 5^{x+3} + 25 \cdot 5^{x+3} - 29 \cdot 5^{x+3} \\
7^{x^2-9} &= 5^{x+3} \\
(x^2-9)\ln 7 &= (x+3)\ln 5 \\
(x-3)\ln 7 &= \ln 5 \\
x-3 &= \frac{\ln 5}{\ln 7} \\
x_1 &= \frac{\ln 5}{\ln 7} + 3 \approx 3{,}82709 \\
x_2 &= -3 \quad \text{,weil dann} \quad x^2-9 = 0 \quad \text{und} \\
& \qquad x+3 = 0 \quad \text{gilt.} \\
L &= \left\{ -3;\ 3{,}82709 \right\}
\end{aligned}
$$

10d)

$$
\begin{aligned}
7^{3x+2} - 9^{2x-3} &= -343^{x+1} + 3^{x-1} \\
7^{3x+2} + 343^{x+1} &= 3^{4x-1} + 9^{2x-3} \\
7^{3x+2} + 7^{3x+3} &= 3^{4x-1} + 3^{4x-6} \\
7^{2} \cdot 7^{3x} + 7^{3} \cdot 7^{3x} &= 3^{-1} \cdot 3^{4x} + 3^{-6} \cdot 3^{4x} \\
49 \cdot 7^{3x} + 343 \cdot 7^{3x} &= \frac{1}{3} \cdot 3^{4x} + \frac{1}{729} \cdot 3^{4x} \\
392 \cdot 7^{3x} &= \frac{244}{729} \cdot 3^{4x} \\
\ln 392 + 3x \ln 7 &= \ln 244 - \ln 729 + 4x \ln 3 \\
3x \ln 7 - 4x \ln 3 &= \ln 244 - \ln 729 - \ln 392 \\
x(3 \ln 7 - 4 \ln 3) &= \ln 244 - \ln 729 - \ln 392 \\
x &= \frac{\ln 244 - \ln 729 - \ln 392}{3 \ln 7 - 4 \ln 3} \\
x &\approx -4{,}895627 \\
L &= \left\{ -4{,}895627 \right\}
\end{aligned}
$$