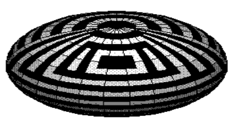
Übungsaufgabe

Führen Sie eine ausführliche Funktionsuntersuchung (auch Kurvendiskussion genannt) für die folgende Funktionenschar durch.

$$\mathbf{f_K(x) = x^4 + K x^2} \qquad \mathbf{K} \in \mathrm{R}$$

(Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrie, Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse, Extrempunkte, Monotonie, Wendepunkte, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Krümmung, Wertetabelle, Skizze des Graphen)
Die Reihenfolge, in der die o.g. Punkte behandelt werden, kann beliebig gewählt werden.
(Führen Sie gegebenenfalls eine Fallunterscheidung für $K < 0$, $K > 0$ und $K = 0$ durch.)

Fertigen Sie für die Funktionen $f_0(x)$, $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die man durch Einsetzen von $K = 0$, $K = 1$ und $K = -1$ erhält jeweils eine Wertetabelle an und zeichnen Sie die Graphen dieser drei Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.



L ö s u n g e n

Definitionsbereich

Da es sich bei der Schar $f_K(x) = x^4 + K x^2$ um ganz-rationale Funktionen handelt, gilt für den Definitionsbereich: $\underline{\underline{D(f) = R}}$

Symmetrie

$f_K(-x) = (-x)^4 + K(-x)^2 = x^4 + K x^2$

Weil $f_K(x) = f_K(-x)$ ist und in den Funktionsgleichungen nur Terme mit geraden Exponenten vorkommen, verlaufen die Graphen der Funktionen $f_K(x)$ <u>symmetrisch zur y–Achse</u>.

Nullstellen

$f_K(x) = 0$

$x^4 + K x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \qquad$ (Doppelte Nullstelle)

$x^2 + K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{-K} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \sqrt{-K} \quad \wedge \quad x_3 = -\sqrt{-K}$

Für $K < 0$ wird der Radikand positiv; d.h. $\pm\sqrt{-K}$ ist definiert.

Für $K < 0$ haben die Funktionen die Nullstellen $\underline{\underline{x_1 = 0}}$, $\underline{\underline{x_2 = \sqrt{-K}}}$ und $\underline{\underline{x_3 = -\sqrt{-K}}}$

Schnittpunkt mit der y_Achse

$f_K(0) = 0 \quad \Rightarrow$

Die Graphen der Funktionenschar sc<hneiden die y-Achse im <u>Koordinatenursprung</u>.

Extrempunkte

<u>Notwendige Bedingung für Extremstellen:</u> $f_K^{\mu}(x) = 0$

$f_K^{\mu}(x) = 4x^3 + 2Kx$

$4x_E^3 + 2Kx_E = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E1} = 0$

$4x_E^2 + 2K = 0$

$x_E^2 = -\frac{K}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_{E2,3} = \pm\sqrt{-\frac{K}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x_{E2} = \sqrt{-\frac{K}{2}} \quad \wedge \quad x_{E3} = -\sqrt{-\frac{K}{2}}$

Für $K < 0$ ist der Radikand positiv und die Wurzel folglich definiert.

$x_{E1} = 0$, $x_{E2} = \sqrt{-\frac{K}{2}}$ und $x_{E3} = -\sqrt{-\frac{K}{2}}$ sind für $K < 0$ mögliche Extremstellen.

Für $K \geq 0$ ist $x_{E1} = 0$ die einzige mögliche Extremstelle.

<u>Hinreichende Bedingung für Extremstellen:</u> $f_K'(x) = 0$ s.o. und $f_K''(x) \neq 0$

$$f_K''(x) = 12\,x^2 + 2\,K$$

$$\boxed{f_K''(x_{E1}) = f_K''(0) = 2\,K}$$

<u>1. Fall</u> $K = 0 \Rightarrow 2\,K = 0 \Rightarrow f_0(x) = x^4$

Diese Funktion hat ein absolutes Minimum an der Stelle $x_{E1} = 0$; also im Punkt $\underline{\underline{P_{Min} = (0\,/\,0)}}$ d.h. im Koordinatenursprung.

<u>2. Fall</u> $K < 0 \Rightarrow 2\,K < 0$ $x_{E1} = 0$ ist Maximalstelle.

Diese Funktionen haben im Punkt $\underline{\underline{P_{Max} = (0\,/\,0)}}$ also im Koordi-ursprung ein lokales Maximum.

<u>3. Fall</u> $K > 0$ Die Funktionen f_K habenein absolutes Minimum an der Stelle $x_{E1} = 0$ also im Punkt $\underline{\underline{P_{Min} = (0\,/\,0)}}$ (Koordinatenursprung)

$$\boxed{f_K''\left(x_{E2}\right) = f_K''\left(\sqrt{-\frac{K}{2}}\right) = 12\left(\sqrt{-\frac{K}{2}}\right)^2 + 2\,k = 12\left(-\frac{K}{2}\right) + 2\,k = -4\,K}$$

<u>1. Fall</u> $K = 0 \Rightarrow -4\,K = 0 \Rightarrow f_0(x) = x^4$ s. o.

<u>2. Fall</u> $K < 0 \Rightarrow -4\,K > 0 \Rightarrow x_{E2} = \sqrt{-\frac{K}{2}}$ ist eine Miniimalstelle.

$$f_K\left(\sqrt{-\frac{K}{2}}\right) = \left(\sqrt{-\frac{K}{2}}\right)^4 + K\left(\sqrt{-\frac{K}{2}}\right)^2 = \frac{K^2}{4} - K \cdot \frac{K}{2} = -\frac{1}{4}K^2$$

Die Funktionen haben im Punkt $\underline{\underline{P_{Min,1} = \left(\sqrt{-\frac{K}{2}} \;\middle|\; \frac{1}{4}K^2\right)}}$ ein absolutes Minimum.

Wegen der Achsensymmetrie der Funktionsgraphen existiert ein weiteres absolutes Minimum im Punkt $\underline{\underline{P_{Min,2} = \left(-\sqrt{-\frac{K}{2}} \;\middle|\; -\frac{1}{4}K^2\right)}}$

$$\boxed{f_K^{\P}\left(x_{E3}\right) = f_K^{\P}\left(-\sqrt{-\frac{K}{2}}\right) = 12\left(-\sqrt{-\frac{K}{2}}\right)^2 + 2\,k = 12\left(-\frac{K}{2}\right) + 2\,k = -4\,K = f_K^{\P}(x_{E''})}$$

Da die zweite Ableitung für $x_{E2} = \sqrt{-\frac{K}{2}}$ und $x_{E3} = -\sqrt{-\frac{K}{2}}$ identisch ist, stimmt die Minimum-Maximum-Untersuchung für x_{E2} mit der von x_{E3} überein. Diese Untersuchung braucht für x_{E3} folglich nicht noch einmal durchgeführt werden.

Wendepunkte

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f_K^{\P}(x) = 12\,x^2 + 2\,K = 0$

$$12\,x_w^2 + 2\,K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\,x_w^2 + K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_w = \pm\sqrt{-\frac{K}{6}} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_{w1} = \sqrt{-\frac{K}{6}} \quad \wedge \quad x_{w2} = -\sqrt{-\frac{K}{6}}$$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen: $f_K^{\mu}(x) \neq 0$, $f_K^{\P}(x) = 0$ s.o. und $f_K^{\mu\mu\mu}(x) \neq 0$

Wegen der Symmetrie zur y-Achse reicht es, nur eine Stelle genauer zu untersuchen.

$$\begin{aligned} f_K^{\mu}(x_{w1}) &= f_K^{\mu}\left(\sqrt{-\frac{K}{6}}\right) = 4\left(\sqrt{-\frac{K}{6}}\right)^3 + 2\,K\sqrt{-\frac{K}{6}} \\ &= 4\left(-\frac{K}{6}\right)\sqrt{-\frac{K}{6}} + 2\,K\sqrt{-\frac{K}{6}} = -\frac{2}{3}\,K\sqrt{-\frac{K}{6}} + 2\,K\sqrt{-\frac{K}{6}} \\ &= 1\frac{1}{3}\,K\sqrt{-\frac{K}{6}} \end{aligned}$$

1. Fall $\quad K = 0 \quad \Rightarrow \quad 1\frac{1}{3}\,K\sqrt{-\frac{K}{6}} = 0$

2. Fall $\quad K < 0 \quad \Rightarrow \quad 1\frac{1}{3}\,K\sqrt{-\frac{K}{6}} \neq 0$

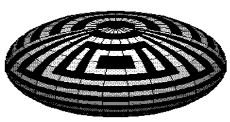
3. Fall $\quad K > 0 \quad$ entfällt, weil $\sqrt{-\frac{K}{6}}$ nicht definiert ist.

Die dritte Ableitung lautet: $f_K^{\mu\mu\mu}(x) = 24\,x$

1. Fall $\quad K = 0 \quad \Rightarrow \quad 24\,x_w = 24\sqrt{-\frac{K}{6}} = 0$

2. Fall $\quad K < 0 \quad \Rightarrow \quad 24\,x_w = 24\sqrt{-\frac{K}{6}} \neq 0$

3. Fall $\quad K > 0 \quad$ entfällt, weil $\sqrt{-\frac{K}{6}}$ nicht definiert ist.



Die Wendestelle $x_{w1} = \sqrt{-\frac{K}{6}}$ existiert nur für Funktionen der Schar, wenn $K < 0$ ist.

$$f_K\left(x_{w1}\right) = f_K\left(\sqrt{-\frac{K}{6}}\right) = \left(\sqrt{-\frac{K}{6}}\right)^4 + K\left(\sqrt{-\frac{K}{6}}\right)^2$$

$$= \frac{K^2}{36} + K\left(-\frac{K}{6}\right) = \frac{1}{36}K^2 - \frac{6}{36}K^2 = -\frac{5}{36}K^2$$

Aus Symmetriegründen ist $x_{w2} = -\sqrt{-\frac{K}{6}}$ ebenfalls eine Wendestelle und es gilt: $f_K(x_{w1}) = f_K(x_{w2}) = -\frac{5}{36}K^2$

Für $K < 0$ haben die Funktionen der Schar $f_K(x) = x^4 + Kx^2$ die beiden Wendepunkte $\underline{\underline{W_1 = \left(\sqrt{-\frac{K}{6}} \;\middle|\; -\frac{5}{36}K^2\right)}}$ und $\underline{\underline{W_2 = \left(-\sqrt{-\frac{K}{6}} \;\middle|\; -\frac{5}{36}K^2\right)}}$

<u>Krümmung</u>

<u>Linkskrümmung</u> Bedingung: $f_K''(x) > 0$

$$12x^2 + K > 0 \Leftrightarrow 6x^2 + K > 0 \Leftrightarrow x^2 > -\frac{K}{6} \Leftrightarrow$$

$$x > \sqrt{-\frac{K}{6}} \wedge x < -\sqrt{-\frac{K}{6}}$$

<u>1.Fall</u> $K = 0 \Rightarrow x > 0 \wedge x < 0$

Diese Bedingung ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt.

Man erhält für $K = 0$ die Funktion $f_0(x) = x^4$. Der Graph dieser Funktion ist in den folgenden Bereichen linksgekrümmt:

$\underline{\underline{L_1 = \{-\ldots < x < 0 \,/\, x \in \mathbb{R}\}}}$ und $\underline{\underline{L_2 = \{0 < x < \ldots \,/\, x \in \mathbb{R}\}}}$

<u>2. Fall</u> $K < 0$

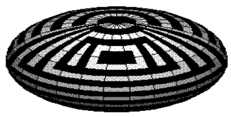
Für $K < 0$ sind die Graphen der Funktionenschar $f_K(x)$ in den folgenden Bereichen

inksgekrümmt:

$\underline{\underline{L_1 = \left\{-\infty < x < -\sqrt{-\frac{K}{6}} \,/\, x \in \mathbb{R}\right\}}}$

und $\underline{\underline{L_2 = \left\{\sqrt{-\frac{K}{6}} < x < \infty \,/\, x \in \mathbb{R}\right\}}}$

<u>3. Fall</u> $K > 0$ entfällt, da der Radikand der Wurzel negativ wird.



Rechtskrümmung Bedingung: $f_K^{\P}(x) < 0$

$$12x^2 + K < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 + K < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < -\frac{K}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{-\frac{K}{6}} < x \quad \wedge \quad \sqrt{-\frac{K}{6}} > x$$

1. Fall Für $K = 0$ sind die beiden Ungleichungen gemeinsam unlösbar. Der Graph der Funktion $f_0(x) = x^4$ weist ist nur linksgekrümmt s.o. und weist folglich keine Rechtskrümmung auf.

2. Fall Für $K < 0$ sind die Graphen der Funktionenschar $f_K(x)$ im folgenden Bereich rechtsgekrümmt: $R = \left\{ -\sqrt{-\frac{K}{6}} < x < \sqrt{-\frac{K}{6}} \;/\; x \in R \right\}$

3. Fall $K > 0$ entfällt, da der Radikand der Wurzel negativ wird.

Verhalten für $x \text{ ¡ } \pm\infty$

$$\lim_{x \text{ ¡ } \pm\infty} f_K(x) = \lim_{x \text{ ¡ } \pm\infty} (x^4 + Kx^2) = \lim_{x \text{ ¡ } \pm\infty} x^4 \left(1 + \frac{K}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \text{ ¡ } \pm\infty} x^4 \cdot \lim_{x \text{ ¡ } \pm\infty} \left(1 + \frac{K}{x^2}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$$

Für extrem große und extrem kleine x-Werte gehen die Werte der Funktionen $f_K(x)$ gegen Unendlich.

Wertebereich

1. Fall $K = 0$

Der Wertebereich der Funktion $f_0(x) = x^4$ ist durch das absolute Minimum im Koordinatenursprung nach unten begrenzt. Es gilt:

$$W(f_0) = \{0 < f_0(x) < \infty \;/\; f_0(x) \in R\}$$

2. Fall $K < 0$

Der Wertebereich der Funktionen $f_K(x)$ ist durch den Funktionswert der beiden Minimalstellen nach unten begrenzt. Es gilt:

$$W(f_K) = \{-\frac{1}{4}K^2 < f_K(x) < \infty \;/\; f_K(x) \in R\}$$

3. Fall $K > 0$

Der Wertebereich der Funktion $f_K(x) = x^4 + Kx^2$ ist durch das absolute Minimum im Koordinatenursprung nach unten begrenzt. Es gilt:

$$W(f_K) = \{0 < f_K(x) < \infty \;/\; f_K(x) \in R\}$$

Monotonie

Für **K** ^{3} **0** sind die Funktionen $f_K(x)$ im Bereich $\underline{\underline{F = \{-\infty < x < 0 \,/\, x \in R\}}}$ streng monoton fallend fallend und im Bereich $\underline{\underline{S = \{0 < x < \infty \,/\, x \in R\}}}$ streng monoton steigend.

Für **K** < **0** sind die Funktionen $f_K(x)$ in den Bereichen
$\underline{\underline{F_1 = \{-\infty < x < -\sqrt{-0{,}5\,K} \,/\, x \in R\}}}$ und $\underline{\underline{F_2 = \{0 < x < \sqrt{-0{,}5\,K} \,/\, x \in R\}}}$
streng monoton fallend. Die Funktionen $f_K(x)$ sind in den beiden Bereichen
$\underline{\underline{S_1 = \{-\sqrt{-0{,}5\,K} < x < 0 \,/\, x \in R\}}}$ und $\underline{\underline{S_2 = \{\sqrt{-0{,}5\,K} < x < \infty \,/\, x \in R\}}}$
streng monoton steigend.

Wertetabellen

$$\mathbf{f_K(x) = x^4 + k\,x^2}$$

Wertetabelle für $f_0(x) = x^4$

x	0	± 0,25	± 0,5	± 0,75	± 1	± 1,25	± 1,5	± 1,75	± 2
$\mathbf{f_0(x)}$	0	0,00391	0,036	0,316	1	2,441	5,063	9,379	16

Wertetabelle für $f_1(x) = x^4 + x^2$

x	0	± 0,25	± 0,5	± 0,75	± 1	± 1,25	± 1,5	± 1,75	± 2
$\mathbf{f_1(x)}$	0	0,066	0,313	0,879	2	4,004	7,313	12,441	20

Wertetabelle für $f_{-1}(x) = x^4 - x^2$

x	0	± 0,25	± 0,5	± 0,75	± 1	± 1,25	± 1,5	± 1,75	± 2
$\mathbf{f_0(x)}$	0	− 0,059	− 0,188	− 2,46	0	0,879	2,813	6,316	12

$f_0(x) = x^4$	$f_1(x) = x^4 + x^2$	$f_{-1}(x) = x^4 - x^2$