Klassenarbeit Nr. 2

Aufgabe 1

Der Stamm einer Buche hat den Umfang U = 370 cm.

a) Berechne den Durchmesser.

b) Man kann das Alter eines Baumes an der Anzahl der Jahresringe erkennen.
Die durchschnittliche Dicke eines Jahresringes beträgt 2 mm.
Wie alt ist die Buche ungefähr ?

Aufgabe 2

Ein Autoreifen hat den äußeren Reifendurchmesser 625 mm.

a) Berechne den Umfang des Reifens.

b) Wie lang ist der Weg, den ein Wagen mit diesem bei 26 Radumdrehungen zurücklegt ?

c) Der Wagen hat einen Weg von 1962,5 m zurückgelegt.
Wie oft hat sich das Rad gedreht ?

d) Der Wagen fährt mit einer Geschwindigkeit von 150 km/h.
Berechne die Anzahl der Radumdrehungen pro Minute.

e) Das Reifenprofil beträgt statt 7 mm nur noch 1 mm.
Um wieviel Prozent ist der Umfang des Reifens kleiner geworden ?
Wie wirkt sich dies auf die Angabe der Geschwindigkeit durch den Tachometer aus ?

Aufgabe 3

Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge a = 6 cm.

a) Zeichne das Quadrat.

b) Schlage um die Punkte A und C jeweils einen Kreis, auf dem die Punkte B und D liegen.

c) Die beiden Kreise haben eine gemeinsame linsenförmige Schnittfläche A_S.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt dieser Fläche A_S.

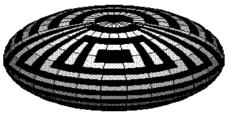
Aufgabe 4

Ein Baumstamm hat den Radius r = 80 cm.
Aus diesem Stamm soll ein möglichst großer Balken hergestellt werden, dessen Querschnittsfläche ein regelmäßiges Achteck ist.

a) Fertige eine Skizze an und beschrifte sie.

b) Berechne den Flächeninhalt und die Seitenlänge der achteckigen Querschnittsfläche.

c) Wieviel Prozent beträgt der Holzabfall bei der Herstellung des Balkens ?



Lösungen

1a) $U = 2\pi r = \pi d \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{U}{\pi} = \frac{370 \text{ cm}}{\pi} = 117{,}775 \text{ cm}$

Der Durchmesser des Stammes beträgt $\underline{\underline{117{,}775 \text{ cm}}}$.

1b) $r = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \cdot 117{,}775 \text{ cm} = 58{,}887 \text{ cm} = 588{,}87 \text{ mm}$

$588{,}87 \text{ mm} : 2 \text{ mm} = 294{,}436 \approx 294$

Der Baum ist ungefähr $\underline{\underline{294 \text{ Jahre}}}$ alt.

2a) $U = \pi d = \pi \cdot 625 \text{ mm} = 1963{,}495 \text{ mm}$

Der Umfang des Reifens beträgt $\underline{\underline{1963{,}495 \text{ mm}}}$.

2b) $26\,U = 26 \cdot 1963{,}495 \text{ mm} \approx 51{,}051 \text{ m}$

Der Weg beträgt $\underline{\underline{51{,}051 \text{ m}}}$.

2c) $1962{,}5 \text{ m} : 1{,}963495 \text{ m} = 999$

Das Rad hat sich $\underline{\underline{999 \text{ mal}}}$ gedreht.

2d) $v = 150 \text{ km/h} = 2{,}5 \text{ km/min} = 2500 \text{ m/min}$

$2500 \text{ m} : 1{,}963495 \text{ m} = 1273$

Das Rad dreht sich pro Minute $\underline{\underline{1273 \text{ mal}}}$.

2e) $U_1 = 1963{,}495 \text{ mm}$

$U_2 = \pi \cdot 613 \text{ mm} = 1925{,}796 \text{ mm}$

$1\,\%$ von $1963{,}495 \text{ mm} = 19{,}63495 \text{ mm}$

$1925{,}796 \text{ mm} : 19{,}63495 \text{ mm} = 98{,}08$

$100\,\% - 98{,}08\,\% = 1{,}92\,\%$

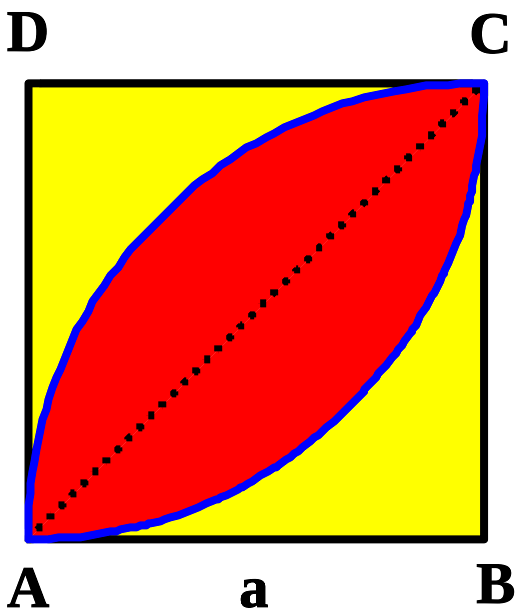
Der Umfang ist um $\underline{\underline{1{,}92\,\% \text{ kleiner}}}$ geworden.

$100\,\% : 98{,}08\,\% = 1{,}0196$

Die Geschwindigkeitsanzeige des Tachometers erhöht sich um den Faktor 1,096.

Es wird also eine um $\underline{\underline{1{,}96\,\% \text{ zu hohe}}}$ Geschwindigkeit angezeigt.

Skizze zu 3a) und 3b)



3c) Bestimmung des Umfangs der linsenförmigen Schnittfläche

Die beiden Kreisbögen, die jeweils von A nach C verlaufen, gehören zu Viertelkreisen mit dem Radius a. Sie haben folglich zusammen die Länge, die dem Umfang eines halben Kreises entspricht.
Für den Umfang der lisenförmigen Schnittfläche U_S gilt also:

$$U_S = \pi \cdot a = \pi \cdot 6\text{ cm} = 18{,}85\text{ cm}$$

Der Umfang der linsenförmigen Schnittfläche beträgt $\underline{\underline{U_S = 18{,}85\text{ cm}}}$.

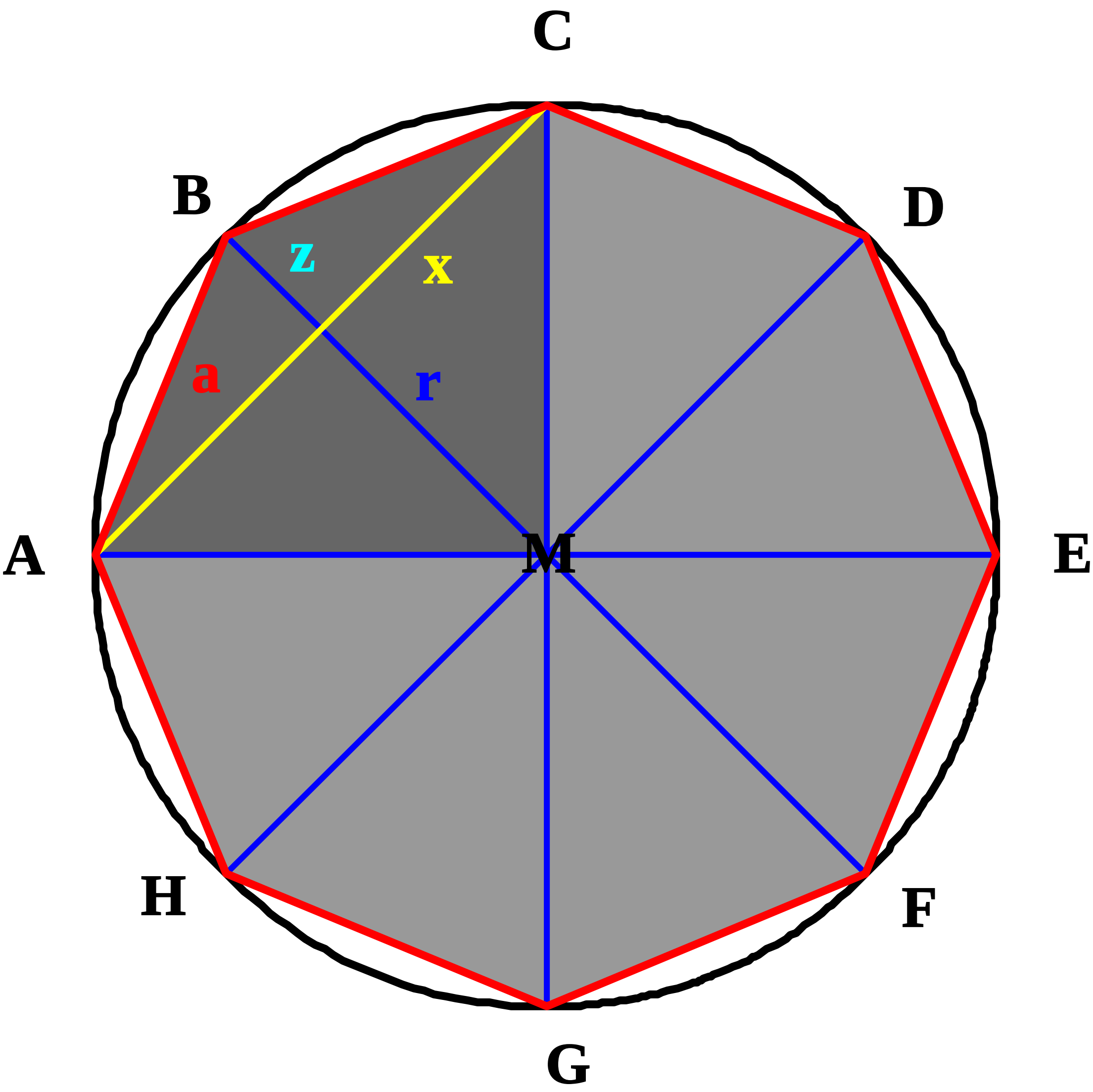
Bestimmungs des Flächeninhalts der linsenförmigen Schnittfläche

Die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und der um B geschlagenen Kreisbogen umranden einen Viertelkreis.
(Das gleiche ngilt übrigens auch für die Strecken $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ und den um D geschlagenen Kreisbogen.)
Die in der Skizze gepunktet eingezeichnete Diagonale halbiert wegen der Symmetrie die linsenförmige Schnittfläche, die von den beiden Kreisbögen umrandet wird.
Man bekommt also den Flächeninhalt der halben Schnittfläche, wenn man vom Flächeninhalt eines Viertelkreises den Flächeninhalt des DEreiecks
ABC
abzieht. Um den Flächeninhalt der gesamten Fläche zu erhalten, muss man das Ergebnis nur noch verdoppeln. Es gilt also:

$$A_S = 2\left(\frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{2}a^2\right) = 2a^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 6^2\text{ cm}^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) = 20{,}549\text{ cm}^2$$

Die linsenförmige Schnittfläche hat den Flächeninhalt $\underline{\underline{A_S = 20{,}549\text{ cm}^2}}$.

Skizze zu 4a)



4b) Berechnung des Flächeninhalts des regelmäßigen Achtecks

Der Flächeninhalt des regelmäßigen Achtecks ist vier mal so groß wie der Flächeninhalt des Drachens AMCB.

Da das Dreieck AMC rechtwinklig ist und seine beiden Katheten die gleiche Länge r haben, gilt für die Drachendiagonale x:

$$x^2 = 2r^2 \quad \Rightarrow \quad x = r\sqrt{2}$$

Die andere Diagonale des Drachens hat die Länge r.
Damit erhält man für den Flächeninhalt des Achtecks:

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{2} \cdot r = 2r^2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot (80\text{ cm})^2 \cdot \sqrt{2} = 18101{,}9336\text{ cm}^2$$

Die achteckige Querschnittsfläche des Balkens hat den Flächeninhalt

$\underline{\underline{A = 18102\text{ cm}^2}}$.

4b) **<u>Berechnung der Seitenlänge des regelmäßigen Achtecks</u>**

Aus der Zeichnung entnimmt man:

$$a^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2} r\sqrt{2}\right)^2 + z^2 \quad \text{mit}$$

$$z = r - \frac{x}{2} = r\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \quad \text{folgt:}$$

$$a^2 = \left(\frac{1}{2} r\sqrt{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 r^2 = \frac{1}{2} r^2 + \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) r^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right) r^2$$

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot r = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot 80 \text{ cm} = 61{,}229 \text{ cm}$$

Die Seitenlänge des Achtecks beträgt $\underline{\underline{a = 61{,}229 \text{ cm}}}$.

4c) Die kreisförmige Fläche des Baumstammes hat den Flächeninhalt:

$$A_K = \pi r^2 = \pi \cdot (80 \text{ cm})^2 = 20106{,}19298 \text{ cm}^2$$

1% dieser Kreisfläche sind $201{,}0619298 \text{ cm}^2$

Das Achteck hat den Flächeninhalt $18101{,}9336 \text{ cm}^2$

$$18101{,}9336 \text{ cm}^2 : 201{,}0619298 \text{ cm}^2 = 90{,}03 \approx 90$$

90 % vom Flächeninhalt der Kreisfläche des Baumstammes entfallen auf die achteckige Querschnittsfläche des Balkens.

Der Verschnitt beträgt folglich $\underline{\underline{10\ \%}}$.