Übungsaufgabe z. Th. lineare Funktionen

Ein Dreieck hat die Eckpunkte $A = (-8/-12)$, $B = (12/-17)$ und $C = (3/10)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g_a, g_b und g_c, auf denen die Dreieckseiten $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ liegen.

b) Berechnen Sie die Längen der Seiten a, b und c des Dreiecks.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h, die senkrecht zur Geraden g_c ist und durch den Punkt C verläuft.

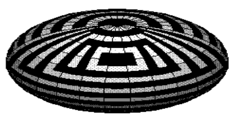
d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes F, in dem die Gerade h die Gerade g_c schneidet.

e) Berechnen Sie die Länge der Höhe h_c und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

f) Geben Sie die Gleichung der Geraden g_{s_a} und g_{s_b} an, auf denen die Seitenhalbierenden s_a und s_b des Dreiecks ABC liegen.

g) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks.

h) Überprüfen Sie die Lösung der Aufgabe durch eine geeignete Darstellung im Koordinatensystem.



Lösung

a) Bestimmung von g_a

$$\left.\begin{array}{rcr} 12\,m + b &=& -17 \\ 3\,m + b &=& 10 \end{array}\right\}\ (-) \qquad (\alpha)$$

$$\begin{array}{rcrl} 9\,m &=& -27 & \\ m &=& -3 & \quad \text{in } (\alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -9 + b &=& 10 \\ b &=& 19 \end{array}$$

Die Gleichung für die Gerade g_a lautet: $\underline{\underline{y = -3\,x + 19}}$.

Bestimmung von g_b

$$\left.\begin{array}{rcr} -8\,m + b &=& 12 \\ 3\,m + b &=& 10 \end{array}\right\}\ (-) \qquad (\alpha)$$

$$\begin{array}{rcrl} -11\,m &=& -22 & \\ m &=& 2 & \quad \text{in } (\alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6 + b &=& 10 \\ b &=& 4 \end{array}$$

Die Gleichung für die Gerade g_b lautet: $\underline{\underline{y = 2\,x + 4}}$.

Bestimmung von g_c

$$\left.\begin{array}{rcr} -8\,m + b &=& -12 \\ 12\,m + b &=& 17 \end{array}\right\}\ (-) \qquad (\alpha)$$

$$\begin{array}{rcrl} -20\,m &=& 5 & \\ m &=& -\frac{1}{4} & \quad \text{in } (\alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} -3 + b &=& -17 \\ b &=& -14 \end{array}$$

Die Gleichung für die Gerade g_c lautet: $\underline{\underline{y = -\frac{1}{4}\,x - 14}}$

b) Bestimmung der Seitenlänge

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(3 - 12)^2 + (10 - (-17))^2} = \sqrt{(-9)^2 + 27^2} = \sqrt{81 + 729} = \sqrt{810}$$

$$a = 28{,}460$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(3 - (-8)^2 + (10 - (-12))^2} = \sqrt{11^2 + 22^2} = \sqrt{121 + 484} = \sqrt{605}$$

$$b = 24{,}597$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(12 - (-8))^2 + (-17 - (-12))^2} = \sqrt{20^2 + (-5)^2} = \sqrt{425}$$

$$c = 20{,}616$$

Die drei Seitenlängen des Dreiecks sind:

$a = 28{,}460$ cm, $b = 24{,}597$ cm und $c = 20{,}616$ cm.

c) Bestimmung der Gleichung für h

Die Gerade g_c hat die Steigung $m = -\frac{1}{4}$

Da h senkrecht zu g_c ist, hat die Gerade h die Steigung m = 4.

Weil der Punkt C = (3 / 10) auf h liegt, gilt:

$$3 \cdot 4 + b = 10 \quad \Leftrightarrow \quad b = -2$$

Die Gleichung für die Gerade h lautet folglich: $y = 4x - 2$.

d) Bestimmung der Koordinaten des Punktes F

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}x - 14 \\ y &= 4x - 2 \end{aligned} \qquad (=) \qquad (\alpha)$$

$$4x - 2 = -\frac{1}{4}x - 14$$

$$4\frac{1}{4}x = -12$$

$$x = -2\frac{14}{17} \qquad \text{in } (\alpha)$$

$$y = 4 \cdot \left(-\frac{48}{17}\right) - 2 = -\frac{192}{17} - \frac{34}{17} = -\frac{226}{17} = -13\frac{5}{17}$$

Der Punkt F hat die Koordinaten $F = \left(-2\frac{14}{17} \;\middle|\; -13\frac{5}{17}\right)$

e) Bestimmung der Höhe h_c und des Flächeninhalts

$$h_c = \sqrt{\left(-2\frac{14}{17} - 3\right)^2 + \left(-13\frac{5}{17} - 10\right)^2} = \sqrt{33{,}913495 + 542{,}61592}$$

$$h_c = \sqrt{576{,}52942} \approx 24{,}011$$

Die Höhe h_c ist $\underline{\underline{24{,}011\ \text{cm}}}$ lang.

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 20{,}616 \cdot 24{,}011 \approx 247{,}505$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $\underline{\underline{A = 247{,}505\ \text{cm}^2}}$

f) Bestimmung der Geradengleichungen von g_{sa} und g_{sb}

Sei M_a der Mittelpunkt der Dreieckseite a.

$$M_a = \left(\frac{1}{2}(x_B + x_C) \,\middle|\, \frac{1}{2}(y_B + y_C)\right) = \left(\frac{1}{2}(12 + 3) \,\middle|\, \frac{1}{2}(-17+10)\right) = \left(7\frac{1}{2} \,\middle|\, -3\frac{1}{2}\right)$$

Da g_{s_a} außerdem durch den Punkt $A = (-8/-12)$ verläuft, gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} -8\ m + b & = & -12 \\ 7\frac{1}{2}\ m + b & = & -3\frac{1}{2} \end{array}\right\} \ (-) \qquad (\alpha)$$

$$-15\frac{1}{2}\ m = -8\frac{1}{2}$$

$$m = \frac{17}{31} \qquad \text{in } (\alpha) \text{ ergibt}$$

$$-8 \cdot \frac{17}{31} + b = -12 \quad \Leftrightarrow \quad b = -7\frac{19}{31}$$

Die Gerade g_{s_a} hat die Gleichung $\underline{\underline{y = \frac{17}{31}x - 7\frac{19}{31}}}$.

Sei M_B der Mittelpunkt der Dreieckseite b.

$$M_B = \left(\frac{1}{2}(x_A + x_C) \,\middle|\, \frac{1}{2}(y_A + y_C)\right) = \left(\frac{1}{2}(-8 + 3) \,\middle|\, \frac{1}{2}(-12 + 10)\right) = (-2{,}5/-1)$$

Da g_{s_b} außerdem durch den Punkt B = (12 / -17) verläuft, gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} 12\,m + b & = & -17 \\ -2{,}5\,m + b & = & -1 \end{array}\right\} \;(\,-\,) \qquad (\alpha)$$

$$14{,}5\,m \quad = \quad -16 \qquad \Leftrightarrow \qquad m \;=\; -\frac{32}{29} \;=\; -1\frac{3}{29} \quad \text{in } (\alpha) \quad \text{ergibt:}$$

$$-\frac{32}{29}\cdot 12 + b \;=\; -17 \qquad \Leftrightarrow \qquad b \;=\; -\frac{109}{29} \;=\; -3\frac{22}{29}$$

Die Gerade g_{s_b} hat die Gleichung $\underline{\underline{y = -1\frac{3}{29}\,x - 3\frac{22}{29}}}$

g) Berechnung der Schwerpunktkoordinaten

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & \frac{17}{31}\,x - 7\frac{19}{31} \\ y & = & -1\frac{3}{29}\,x - 3\frac{22}{29} \end{array}\right\} \;(\,=\,) \qquad (\alpha)$$

$$\frac{17}{31}\,x - 7\frac{19}{31} \quad = \quad -1\frac{3}{29}\,x - 3\frac{22}{29}$$

$$\frac{493}{899}\,x + \frac{992}{899}\,x \quad = \quad 7\frac{551}{899} - 3\frac{682}{899}$$

$$\frac{1485}{899}\,x \quad = \quad \frac{3465}{899}$$

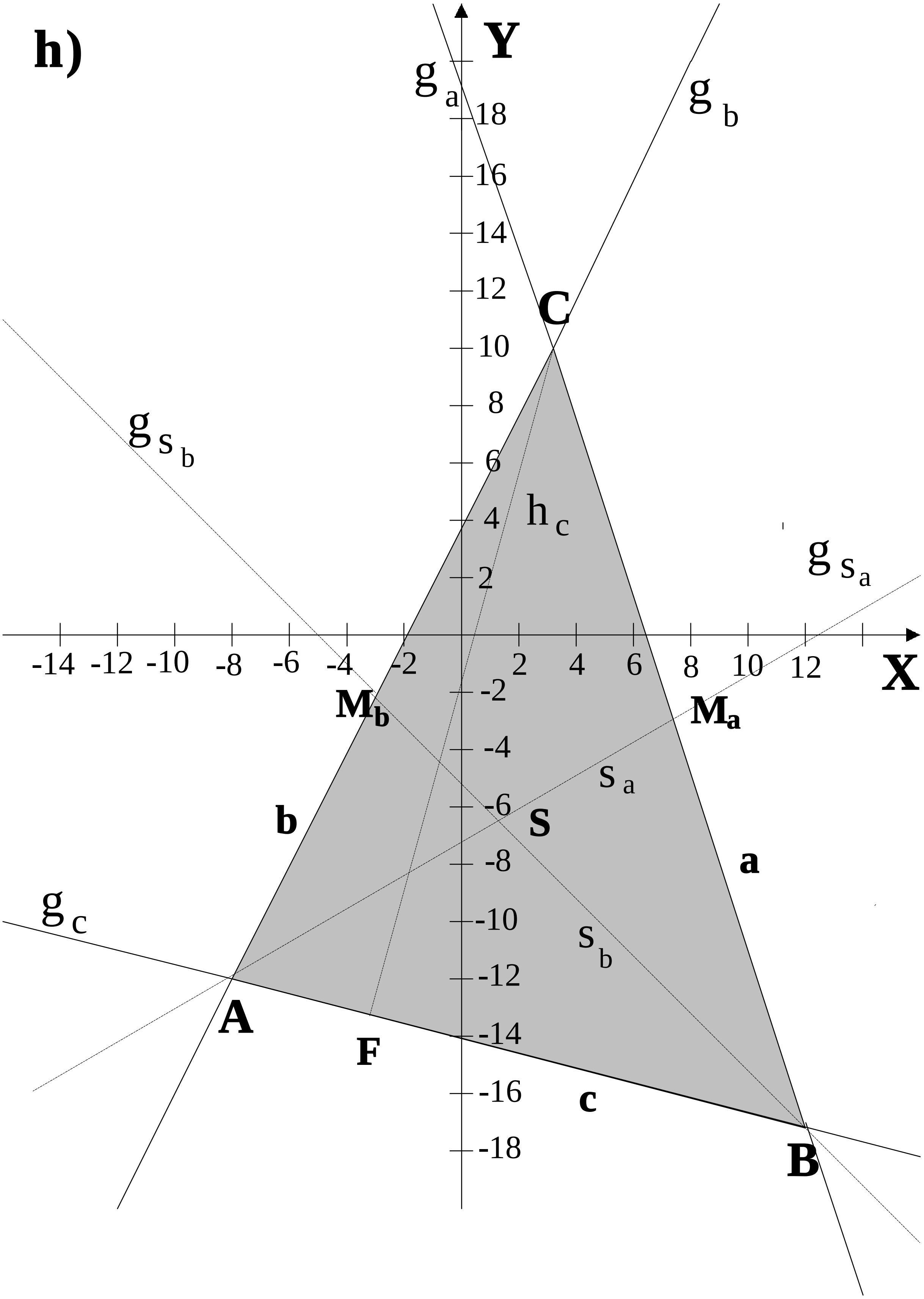
$$x \quad = \quad \frac{3465}{899}\cdot\frac{899}{1485} \;=\; \frac{7}{3} \;=\; 2\frac{1}{3} \qquad \text{in } (\alpha)$$

$$y \quad = \quad \frac{17}{31}\cdot\frac{7}{3} - 7\frac{19}{31} \;=\; \frac{119}{93} - \frac{708}{93}$$

$$y \quad = \quad -\frac{589}{93} \;=\; -6\frac{31}{91} \;=\; -6\frac{1}{3}$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks hat die Koordinaten $\underline{\underline{S = (2\frac{1}{3} /\; -6\frac{1}{3})}}$

h)



Y
X
g_a
g_b
g_c
g_{s_a}
g_{s_b}
h_c
s_a
s_b
C
A
B
F
S
M_a
M_b
a
b
c
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
12