Übungsaufgabe z. Th. lineare Funktionen und Parabeln

Gegeben sind die Parabeln:

$$h(x) = \frac{25}{84}x^2 + \frac{3}{4}x - 1\frac{29}{42} \quad \textbf{und} \quad k(x) = -\frac{25}{84}x^2 - 1\frac{1}{28}x + 4\frac{11}{42}$$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte A und C der Graphen dieser beiden Parabeln.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes S der Strecke $\overline{AC} = e$.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g_f, die die Strecke $\overline{AC} = e$ im Punkt S senkrecht schneidet.

d) Die Gerade g_f schneidet den Graphen von h im 3. Quadranten des Koordinatensystems im Punkt B und den Graphen von k im 2. Quadranten im Punkt D.
Bestimmen sie die Koordinaten dieser beiden Punkte.

e) Weisen Sie nach, dass die Punkte ABCD die Eckpunkte eines Quadrates sind.

f) Berechnen Sie den Flächeninhalt und die Seitenlänge des Quadrats.

g) Geben Sie die Gleichungen der Geraden g_a, g_b, g_c, g_d und g_e an, auf denen die Seiten $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$ und die Diagonale $\overline{AC} = e$ liegen.

h) Leiten Sie eine Lösungsformel für die Berechnung der Nullstellen einer quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0 \quad a,b,c \in R, a \neq 0$ her und bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel die Nullstellen u,v der Parabel h sowie die Nullstellen w,z der Parabel k.

i) Leiten Sie die Scheitelpunktform für eine Parabel her, die durch die allgemeine Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c \quad a,b,c \in R, \ a \neq 0$ gegeben ist.
Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes in Abhängigkeit der Variablen a, b, c an.
Berechnen Sie dann die Koordinaten des Scheitelpunktes H der Parabel h und die Koordinaten des Scheitelpunktes K der Parabel k.

j) Fertigen Sie eine Wertetabell für die Parabel h im Bereich $-7 \leq x \leq 4{,}5$ und für die Parabel k im Bereich $-7{,}5 \leq x \leq 4$ an, und überprüfen Sie durch eine geeignete Zeichnung im Koordinatensystem an die berechneten Ergebnisse. Achten Sie dabei insbesondere auf eine vollständige Beschriftung Ihrer Zeichnung. Verwenden Sie nur die in der Aufgabenstellung vorgegebenen Angaben.

L ö s u n g e n

a) **h(x) = k(x)**

$$\frac{85}{84}x^2 + \frac{3}{4}x - 1\frac{29}{42} = -\frac{25}{84}x^2 - 1\frac{1}{28}x + 4\frac{11}{42}$$

$$\frac{25}{42}x^2 + \frac{21}{28}x + \frac{29}{28}x = \frac{179}{42} + \frac{71}{42}$$

$$\frac{25}{42}x^2 + \frac{25}{14}x = \frac{125}{21} \qquad / \cdot \frac{42}{25}$$

$$x^2 + 3x = 10$$

$$x^2 + 3x + 2{,}25 = 12{,}25$$

$$x + 1{,}5 = \pm\sqrt{12{,}25}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 5$$

$$f(x_1) = \frac{25}{84} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 2 - 1\frac{29}{42}$$

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = \frac{25}{84} \cdot (-25)^2 + \frac{3}{4} \cdot (-5) - \frac{71}{42}$$

$$f(x_2) = 2$$

Die Graphen der beiden Parabeln schneiden sich in den Punkten $\underline{\underline{A = (-5 / 2)}}$ und $\underline{\underline{C = (2 / 1)}}$.

b) $S = \left(\frac{1}{2}(-5+2) / \frac{1}{2}(2+1)\right) = \left(-1\frac{1}{2} / 1\frac{1}{2}\right)$

Der Mittelpunkt S der Strecke hat die Koordinaten: $\underline{\underline{S = (-1{,}5 / 1{,}5)}}$.

c) Die Gerade g_e, auf der die Strecke $\overline{AC} = e$ liegt, hat die Steigung

$$m_e = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} = \frac{1 - 2}{2 - (-5)} = -\frac{1}{7}$$

Die Gerade g_f hat folglich die Steigunh $m_f = 7$.

Da g_f durch S verläuft, gilt:

$$-1\frac{1}{2} \cdot 7 + b = 1\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 1\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2} = 12$$

Die Gerade hat die Gleichung $\underline{\underline{g_f(x) = 7x + 12}}$.

d)

h(x)	**=**	$\mathbf{g_f(x)}$		
$\frac{25}{84}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{71}{42}$	$=$	$7x + 12$		
$\frac{25}{84}x^2 - \frac{25}{4}x$	$=$	$\frac{575}{42}$		
$x^2 - 21x$	$=$	46		
$x^2 - 21x + \frac{441}{4}$	$=$	$\frac{625}{4}$		
$x - 10\frac{1}{2}$	$=$	$\pm\sqrt{\frac{625}{4}}$		
x_1	$=$	$10\frac{1}{2} + 12\frac{1}{2}$	$=$	23
x_2	$=$	$10\frac{1}{2} - 12\frac{1}{2}$	$=$	-2

Da x_1 positiv ist, kann der zugehörige Punkt <u>nicht</u> im 3. oder 4. Quadranten liegen. Es ist also nur das Ergebnis $x_2 = -2$ von Bedeutung.

$$g_f(-2) = 7 \cdot (-2) + 12 = -2$$

Der Punkt B hat die Koordinaten $\underline{\underline{B = (-2 \,/\, -2)}}$.

Fortsetzung Aufg. d)

$$\begin{aligned}
\mathbf{k(x)} &= \mathbf{g_f\,(x)} \\
-\frac{25}{84}x^2 - \frac{29}{28}x + \frac{179}{42} &= 7x + 12 \\
-\frac{25}{84}x^2 - \frac{225}{28}x &= \frac{325}{42} \\
x^2 + 27x &= -26 \\
x^2 + 27x + \frac{729}{4} &= \frac{625}{4} \\
x + 13\frac{1}{2} &= \pm 12\frac{1}{2} \\
x_1 &= 26 \\
x_2 &= -1
\end{aligned}$$

Da x_1 positiv ist, kann der zugehörige Punkt nicht im 3. oder 4. Quadranten liegen. Es ist also nur das Ergebnis $x_2 = -1$ von Bedeutung.
$g_f(-1) = 7 \cdot (-1) + 12 = 5$

Der Punkt D hat die Koordinaten $\underline{\underline{D = (-1 / 5)}}$.

e) Es gilt: $g_f \perp g_e$, und S ist Mittelpunkt von $\overline{AC}$. (s. Aufg.c))
Es ist noch zu zeigen: $\overline{AC} = \overline{BD}$, und S ist auch Mittelpunkt von $\overline{BD}$.

$\overline{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{[2 - (-5)]^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2}$
$\overline{AC} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

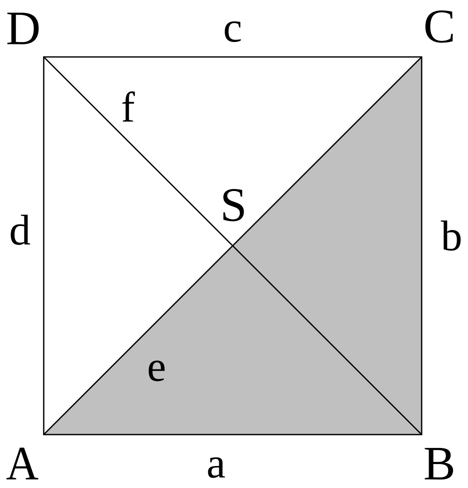
$\overline{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + [5 - (-2)]^2}$
$\overline{BD} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Es gilt also: $\overline{AC} = \overline{BD}$

$S = \left(\frac{1}{2}(x_B + x_D) / \frac{1}{2}(y_B + y_D)\right) = \left(\frac{1}{2}(-2 - 1) / \frac{1}{2}(-2 + 5)\right) = \left(-1\frac{1}{2} / 1\frac{1}{2}\right)$

Da der Punkt S die Strecken $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$ halbiert, die beiden Strecken gleich lang sind und sich in S rechtwinklig schneiden, gilt:
Die Strecken $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$ sind die beiden Diagonalen in einem Quadrat mit den Eckpunkten ABCD.

f)



Für den Flächeninhalt gilt:

$$A = a \cdot b \quad \text{mit } a = b \;\Rightarrow$$

$$A = a^2 \quad \text{mit } 2\,a^2 = e^2 \;\Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2}\,e^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$$

Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt $\underline{\underline{A = 25\ \text{FE}.}}$

g)

$$m_a\,x + b_a = g_a(x)$$

$$\left.\begin{aligned} -5\,m_a + b_a &= 2 \\ -2\,m_a + b_a &= -2 \end{aligned}\right\}\ (-) \qquad (\alpha)$$

$$3\,m_a = 4 \quad\Leftrightarrow\quad m_a = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3} \quad \text{in } (\alpha)$$

$$\frac{20}{3} + b_a = \frac{6}{3} \quad\Leftrightarrow\quad b_a = -\frac{14}{3} = -4\frac{2}{3}$$

Die Gerade g_a hat die Gleichung $\underline{\underline{g_a(x) = -1\frac{1}{3}\,x - 4\frac{2}{3}.}}$

Es gilt: $g_b \perp g_a \;\Rightarrow\; m_b = -\frac{1}{m_a} = \frac{3}{4}$

Da g_b durch C = (2 / 1) verläuft, folgt:

$$\frac{3}{4} \cdot 2 + b = 1 \quad\Leftrightarrow\quad b = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Die Gerade g_b hat die Gleichung $\underline{\underline{g_b(x) = \frac{3}{4}\,x - \frac{1}{2}.}}$

Es gilt: $g_c \parallel g_a \;\Rightarrow\; m_c = m_a = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$

Da g_c durch C = (2 / 1) verläuft, folgt:

$$-\frac{4}{3} \cdot 2 + b = 1 \quad\Leftrightarrow\quad b = \frac{3}{3} + \frac{8}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

Die Gleichung für die Gerade g_c lautet: $\underline{\underline{g_c(x) = -1\frac{1}{3}\,x + 3\frac{2}{3}.}}$

Es gilt: $g_d \parallel g_b \quad \Leftrightarrow \quad m_d = m_b = \frac{3}{4}$

Da g_d durch $D = (-1 / 5)$ verläuft, folgt:

$$\frac{3}{4} \cdot (-1) + b = 5 \quad \Leftrightarrow \quad b = 5 + \frac{3}{4} = 5\frac{3}{4}$$

Die Gleichung für die Gerade g_d lautet: $\underline{\underline{g_d(x) = \frac{3}{4}x + 5\frac{3}{4}.}}$

Die Gerade g_e hat die Steigung $m_e = -\frac{1}{7}$ (s. Aufgabe c))

Da g_e durch $C = (2 / 1)$ verläuft, folgt:

$$-\frac{1}{7} \cdot 2 + b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 + \frac{2}{7} = 1\frac{2}{7}$$

Die Gleichung für die Gerade g_e lautet $\underline{\underline{g_e(x) = -\frac{1}{7}x + 1\frac{2}{7}.}}$

h)

$$\begin{aligned}
a x^2 + b x + c &= 0 && \mid \, : a \\
x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a} x &= -\frac{c}{a} && \mid \text{ quadr. Ergänzung} \\
x^2 + \frac{b}{a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
x + \frac{b}{a} &= \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\
x_1 &= -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\
x_2 &= -\frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man für die Parabel h:

$$a = \frac{25}{84},\ b = \frac{3}{4},\ c = -\frac{71}{42}$$

Das Einsetzen dieser Werte in die Lösungsformeln ergibt:

$$x_1 \quad = \quad -\frac{3}{4}\cdot\frac{42}{25} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{21}{25}\right)^2 + \frac{71}{42}\cdot\frac{84}{25}}$$

$$x_1 \quad = \quad -\frac{63}{50} \quad + \quad \sqrt{\left(\frac{63}{50}\right)^2 + \frac{71}{1}\cdot\frac{2}{25}} \quad = \quad -1{,}26 + \sqrt{\frac{3969}{2500} + \frac{142}{25}}$$

$$x_1 \quad = \quad -1{,}296 + 2{,}696 \quad = \quad 1{,}436 \quad := v$$

$$x_2 \quad = \quad -1{,}296 - 2{,}696 \quad = \quad -3{,}956 \quad := u$$

Die Parabel h hat die Nullstellen $\underline{\underline{u = -3{,}956}}$ und $\underline{\underline{v = 1{,}436.}}$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man für die Parabel k:

$$x_1 \quad = \quad -\frac{29}{28}\cdot\frac{42}{25} + \sqrt{\left(\frac{29}{2}\cdot\frac{3}{25}\right)^2 + \frac{179}{42}\cdot\frac{84}{25}}$$

$$x_1 \quad = \quad -\frac{87}{50} + \sqrt{\frac{7569}{2500} + \frac{358}{25}} \quad = \quad -1{,}747 + \sqrt{17{,}3476}$$

$$x_1 \quad = \quad -1{,}74 + 4{,}165 \quad = \quad 2{,}452 \ := \ z$$

$$x_2 \quad = \quad -1{,}74 - 4{,}165 \quad = \quad -5{,}905 \ := \ w$$

Die Parabel k hat die Nullstellen $\underline{\underline{w = -5{,}905}}$ und $\underline{\underline{z = 2{,}425.}}$

i) $$f(x) \quad = \quad a\,x^2 + b\,x + c \quad = \quad a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) \quad = \quad a\left[x^2 + \frac{b}{a}\,x + \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2\right]$$

$$f(x) \quad = \quad a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2\right]$$

$$f(x) \quad = \quad a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4\,a}$$

Die Parabel f(x) hat den Scheitelpunkt $\underline{\underline{S = \left(-\frac{b}{2\,a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4\,a}\right).}}$

Durch Einsetzen der Koeffizienten der Parabel h erhält man:

$$H = \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{42}{25} \;\middle|\; -\frac{71}{42} - \frac{9}{16} \cdot \frac{21}{25} \right) = \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{21}{25} \;\middle|\; -\frac{71}{42} - \frac{189}{400} \right)$$

$H = (-1{,}26 \;/\; -2{,}163)$

Die Parabel h hat den Scheitelpunkt $\underline{\underline{H = (-1{,}26 \;/\; -2{,}163).}}$

Durch Einsetzen der Koeffizienten der Parabel k erhält man:

$$K = \left(-\frac{29}{28} \cdot \frac{42}{25} \;\middle|\; \frac{179}{42} - \left(\frac{29}{28}\right)^2 \cdot \left(-\frac{21}{25}\right) \right) = \left(-\frac{29}{2} \cdot \frac{3}{25} \;\middle|\; \frac{179}{42} + \frac{17661}{19600} \right)$$

$K = (-1{,}74 \;/\; 5{,}163)$

Die Parabel k hat den Scheitelpunkt $\underline{\underline{K = (-1{,}74 \;/\; 5{,}163).}}$

j) **<u>Wertetabelle für die Parabel h.</u>**

x	-7	-6,5	-6	-5,5	-5	-4,5	-4	-3,5
h(x)	7,64	6,01	4,52	3,18	2	0,96	0,07	-0,67

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
h(x)	-1,26	1,71	-2	-2,15	-2,14	-1,99	-1,69	-1,24

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
h(x)	-0,64	0,10	1	2,05	3,24	4,58	6,07	7,71

<u>Wertetebelle für die Parabel k.</u>

x	-7,5	-7	-6,5	-6	-5,5	-5	-4,5	-4
k(x)	-4,71	-3,07	-1,58	-0,24	-0,96	2	2,90	3,64

x	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
k(x)	4,24	4,69	4,99	5,14	5,14	5	4,71	4,26

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
k(x)	3,67	2,93	2,04	1	-0,188	-1,53	-3,01	-4,64

zu Aufgabe j)