Übungsaufgabe z. Th. Parabel u. Brennpunkt

Gegeben ist die Parabel: $f(x) = \frac{1}{10} x^2$

Der Graph dieser Parabel ist im folgenden als Spiegel aufzufassen.
In die Öffnung der Parabel fallen parallel zur Y- Achse von oben vier Lichtstrahlen S_1, S_2, S_3, S_4 ein. Diese Lichtstrahlen treffen in den Punkten $B_1 = (-6/f(-6))$, $B_2 = (-3/f(-3))$, $B_3 = (2/f(2))$, $B_4 = (7/f(7))$ auf den Graphen der Parabel.

a) Fertigen Sie eine Wertetabelle an, und zeichnen Sie den Graphen der Parabel im Bereich $-9 \leq x \leq 9$ zusammen mit den vier einfallenden Lichtstrahlen in ein Koordinatensystem ein.

b) Leiten Sie eine allgemeine Formel für die Tangente $t(x)$ her, die die Parabel $f(x) = a\,x^2$ im Punkt $B = (x_B/a\,x_B^2)$ berührt.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel (aus b)) die Gleichungen der vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, die den Graphen der Parabel in den Punkten B_1,B_2,B_3,B_4 berühren.

d) Zeichnen Sie die vier Tangenten an den Graphen der Parabel in das Koordinatensystem ein.

e) Konstruieren Sie mit Hilfe des Reflexionsgesetzes die vier reflektierten Lichtstrahlen und geben Sie aus der Zeichnung die Koordinaten des Brennpunktes F an.

Information zum Reflexionsgesetz

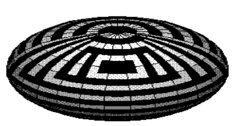
Begriffe

Lot: Das Lot (manchmal auch als Einfallslot bezeichnet) ist eine Hilfslinie, die senkrecht im Auftreffpunkt des einfallenden Lichtstrahls auf der Spiegeloberfläche steht. Bei gekrümmten Flächen steht das Lot senkrecht auf der Tangentialfläche bzw. der Tangente an den Spiegel im Auftreffpunkt des einfallenden Lichtstrahls.

Einfallswinkel α: Der Einfallswinkel α wird vom Lot und dem einfallenden Lichtstrahl gebildet.

Reflexionswinkel β: Der Reflexionswinkel β wird vom Lot und dem reflektierten Lichtstrahl gebildet.

Reflexionsgesetz: Trifft ein Lichtstrahl auf die Oberfläche eines Spiegels, wird er so reflektiert, dass der Einfallswinkel genauso groß ist wie der Reflexionswinkel. $\boxed{\alpha = \beta}$
Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und das Lot liegen in einer Ebene.



L ö s u n g e n

a)

x	0	± 0,5	± 1	± 1,5	± 2	± 2,5	± 3
f(x)	0	0,025	0,1	0,125	0,4	0,625	0,9

x	± 3,5	± 4	± 4,5	± 5	± 5,5	± 6	± 6,5
f(x)	1,225	1,6	2,025	2,5	3,025	3,6	4,225

x	± 7	± 7,5	± 8	± 8,5	± 9
f(x)	4,9	5,625	6,4	7,225	8,1

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= t(x) \\
a\,x^2 &= m\,x + b \\
a\,x^2 - m\,x &= b \\
x^2 - \frac{m}{a}\,x &= \frac{b}{a} \\
x^2 - \frac{m}{a}\,x + \frac{m^2}{4\,a^2} &= \frac{b}{a} + \frac{m^2}{4\,a^2} \\
x - \frac{m}{2\,a} &= \pm\sqrt{\frac{b}{a} + \frac{m^2}{4\,a^2}} \\
x_{1,2} &= \frac{m}{2\,a} \pm \sqrt{\frac{b}{a} + \frac{m^2}{4\,a^2}} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Da die Tangente die Parabel in <u>einem</u> Punkt berührt,darf die Gleichung (*) nur eine Lösung haben.
Das ist der Fall, wenn der Radikand (Term unter der Wurzel) den Wert 0 annimmt. Folglich gilt:

$$\frac{b}{a} + \frac{m^2}{4\,a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b + \frac{m^2}{4\,a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{m^2}{4\,a}$$

Damit erhält die Gleichung für die Tangente die Darstellung:

$$t(x) = m\,x - \frac{m^2}{4\,a}$$

Fortsetzung von Aufgabe b)

Die Koordinaten des Berührpunktes $B = (x_B \,/\, a\,x_B^2)$ müssen diese Tangentengleichung erfüllen. Also gilt:

$$
\begin{aligned}
a\,x_B^2 &= m\,x_B - \frac{m^2}{4\,a} \\
\frac{m^2}{4\,a} - m\,x_B + a\,x_B^2 &= 0 \\
m^2 - 4\,a\,x_B\,m + 4\,a^2\,x_B^2 &= 0 \\
(m - 2\,a\,x_B)^2 &= 0 \\
m &= 2\,a\,x_B
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen der Terme für m und b erhält man:

$$t(x) = m\,x + b = 2\,a\,x_B\,x - \frac{4\,a^2\,x_B^2}{4\,a} = 2\,a\,x_B\,x - a\,x_B^2$$

Die allgemeine Funktionsgleichung für die Tangente t, die die Parabel $f(x) = a\,x^2$ im Punkt $B = (x_B \,/\, a\,x_B^2)$ berührt, lautet:

$$\boxed{t(x) = 2\,a\,x_B\,x - a\,x_B^2}$$

c) Gleichung der Tangente t_1 an den Punkt B_1 = (- 6 / 3,6)

$$t_1(x) = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot (-6) \cdot x - \frac{1}{10} \cdot (-6)^2 = -\frac{6}{5}\,x - \frac{36}{10} = -1\frac{1}{5}\,x - 3\frac{3}{5} = -1{,}2\,x - 3{,}6$$

Die Tangente t_1 hat die Funktionsgleichung: $\boxed{t_1(x) = -1{,}2\,x - 3{,}6}$

Gleichung der Tangente t_2 an den Punkt B_2 = (- 3 / 0,9)

$$t_2(x) = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot (-3) \cdot x - \frac{1}{10} \cdot (-3)^2 = -\frac{3}{5}\,x - \frac{9}{10} = -0{,}6\,x - 0{,}9$$

Die Tangente t_2 hat die Funktionsgleichung: $\boxed{t_2(x) = -0{,}6\,x - 0{,}9}$

Fortsetzung Aufgabe c)

Gleichung der Tangente t_3 an den Punkt B_3 = (2 / 0,4)

$$t_3(x) = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot x - \frac{1}{10} \cdot 2^2 = \frac{2}{5}\,x - \frac{2}{5} = 0{,}4\,x - 0{,}4$$

Die Tangente t_3 hat die Funktionsgleichung: $\underline{\underline{t_3(x) = 0{,}4\,x - 0{,}4}}$

Gleichung der Tangente t_4 an den Punkt B_4 = (7 / 4,9)

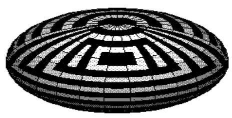
$$t_4(x) = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot 7 \cdot x - \frac{1}{10} \cdot 7^2 = \frac{7}{5}\,x - \frac{49}{10} = 1\frac{2}{5}\,x - 4\frac{9}{10} = 1{,}4\,x - 4{,}9$$

Die Tangente t_4 hat die Funktionsgleichung: $\underline{\underline{t_4(x) = 1{,}4\,x - 4{,}9}}$

d) S. Zeichnung

e) Aus der Zeichnung im Koordinatensystem erhält man durch Ablesen:

Der Brennpunkt F der Parabel hat die Koordinaten $\underline{\underline{F = (0 / 2{,}5)}}$.



zu den Aufgaben a), d), e)

Bestimmung des Brennpunktes einer Parabel durch Reflexion achsenparalleler Lichtstrahlen