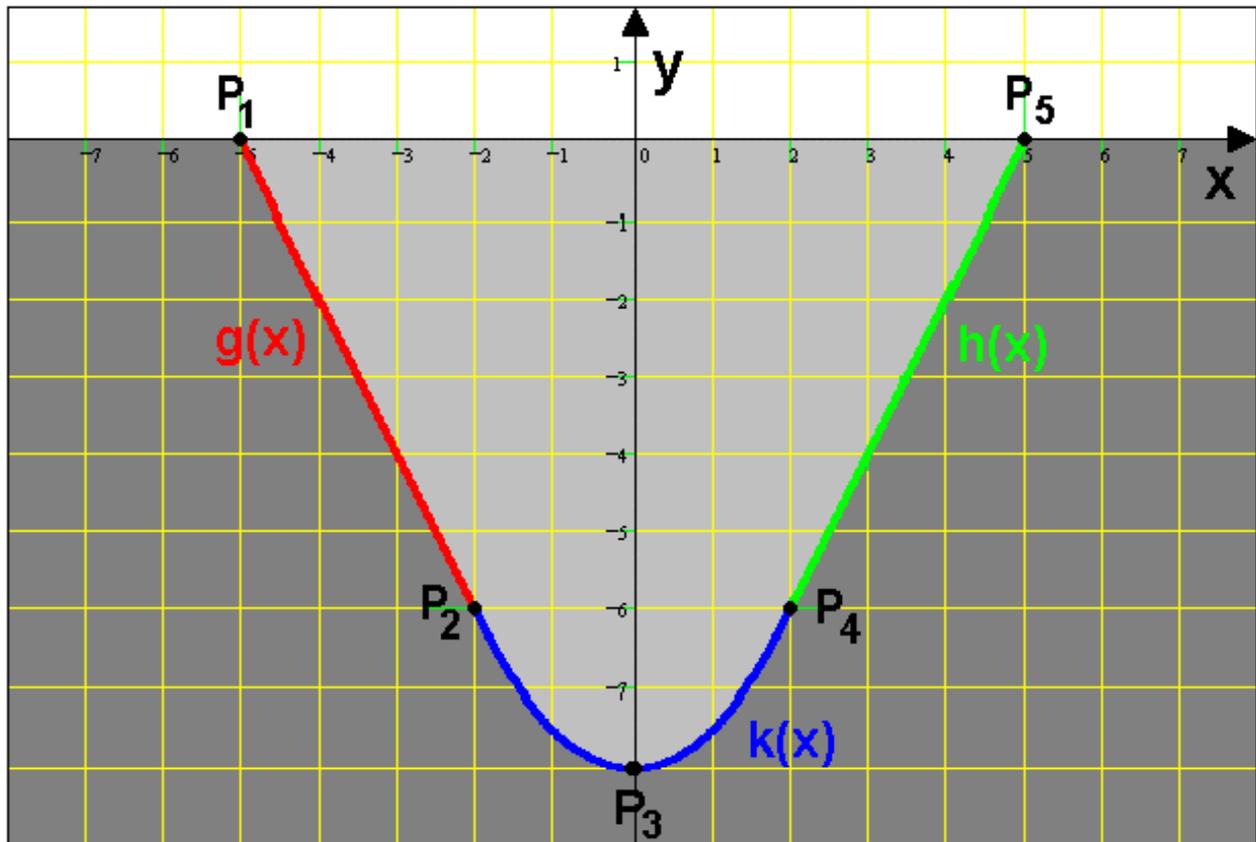


Ü b u n g s a r b e i t

Aufgabe 1.



- a) Die Querschnittsfläche eines Abwasserkanals ist im unteren Teil von einer Parabel k begrenzt, an die sich nach oben die beiden Geraden g und h anschließen.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für diese drei Funktionen, und geben Sie die abschnittsweise definierte Funktion f an, durch die die Querschnittsfläche des Kanals festgelegt ist.

- b) Bei dieser Teilaufgabe sollen die drei Funktionen k , g und h für alle reellen Zahlen definiert sein. Zeigen Sie, dass die Geraden g und h Tangenten an die Parabel k sind.

Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß - Verfahrens.

$$\begin{aligned} 2a + 3b - 5c + 6d - 4e &= 16 \\ 4a - 3b + 2c - 5d + 3e &= -2 \\ -2a + 12b - 4c + 8d - 9e &= -1 \\ a - 2b - 3c + 4d + 7e &= 54 \\ -4a + 6b + 8c - 3d + 5e &= 3 \end{aligned}$$



Aufgabe 3

Der Graph einer ganzen rationalen Funktion vierten Grades der Form

$$f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e \quad a, b, c, d, e \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

verläuft durch die Punkte

$$P_1 = (-1 / -3,2), \quad P_2 = (2 / 0,85), \quad P_3 = (4 / -1,95) \quad \text{und} \quad P_4 = (5 / -3,2).$$

Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse an der Stelle $y_S = -1,95$.

- a)** Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f .
- b)** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f .
- c)** Fertigen Sie eine Wertetabelle an, und zeichnen Sie den Graphen von f in ein Koordinatensystem ein.
- d)** Geben Sie mit Hilfe der Zeichnung bzw. der Wertetabelle die Koordinaten des Hochpunktes H und die Koordinaten der beiden Tiefpunkte T_1 und T_2 des Graphen von f an.
- e)** Eine Parabel $k(x) = f x^2 + g x + h$ $f, g, h \in \mathbf{R}, f \neq 0$ verläuft durch den Hochpunkt H und durch die beiden Tiefpunkte T_1 und T_2 von f . Bestimmen Sie die Parabelgleichung.
- f)** Bestimmen Sie die Nullstellen der Parabel k .
- g)** Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten g und h , die die Parabel in den beiden Punkten T_1 und T_2 berühren.
- h)** Die Tangenten g und h schneiden die Tangente w , die die Parabel im Scheitelpunkt berührt, in den Punkten R und S . Bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Schnittpunkte.
- i)** Die Punkte T_1, T_2, S und R sind die Eckpunkte eines speziellen Vierecks. Um was für ein Viereck handelt es sich dabei ?
- j)** Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Vierecks T_1, T_2, S, R .
- k)** Fertigen Sie für die Parabel k eine Wertetabelle an. Zeichnen Sie die Parabel k , die Tangenten g, h und w sowie das Viereck T_1, T_2, S, R in das Koordinatensystem ein.



Lösungen

1a) Die allgemeine Parabelgleichung lautet: $k(x) = a x^2 + b x + c$
Der Graph der Parabel verläuft durch die Punkte: $P_2 = (-2 / -6)$,
 $P_3 = (0 / -8)$ und $P_4 = (2 / -6)$. Die Parabel schneidet die y-Achse
an der Stelle $y_S = 8$. Folglich gilt: $c = 8$.

Da der Scheitelpunkt P_3 der Parabel auf der y-Achse liegt, ist der Graph
der Parabel symmetrisch zur y-Achse. Diese Symmetrie erkennt man
außerdem an den Koordinaten der Punkte P_2 und P_4 .

Aufgrund der Symmetrie gilt: $b = 0$.

Die Variable a erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von P_2
oder P_4 in die Funktionsgleichung $a x^2 - 8 = k(x)$

$$4 a - 8 = -6 \quad \Leftrightarrow \quad 4 a = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Die Funktionsgleichung der Parabel lautet: $k(x) = \frac{1}{2} x^2 - 8$

Bestimmung der Funktionsgleichungen für die Geraden g und h:

$$m_g = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6}{-2 - (-5)} = \frac{-6}{3} = -2$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von P_1 erhält man:

$$-2 \cdot 8 - 5) + b_g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_g = -10$$

Die Funktionsgleichung für die Gerade g lautet: $g(x) = -2 x - 10$

Im Diagramm erkennt man, dass man die Gerade h durch Spiegelung
Der Geraden g an der y-Achse erhält. Folglich lautet die Funktions-
gleichung für die Gerade h: $h(x) = 2 x - 10$

Die abschnittsweise definierte Funktion f hat die Darstellung:

$$f(x) = \begin{cases} -2 x - 10 & \text{für } -5 \leq x < -2 \\ \frac{1}{2} x^2 - 8 & \text{für } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 x - 10 & \text{für } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$



1b)

$$\begin{aligned}k(x) &= g(x) \\ \frac{1}{2}x^2 - 8 &= -2x - 10 \quad (*) \\ \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 &= 0 \\ x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ (x + 2)^2 &= 0 \\ x &= -2 \quad g(-2) = k(-2) = -6\end{aligned}$$

Da die Gleichung (*) nur eine einzige Lösung hat, ist die Gerade g eine Tangente an die Parabel k. Der Berührungspunkt ist: $P_3 = (-2 / -6)$.

$$\begin{aligned}k(x) &= h(x) \\ \frac{1}{2}x^2 - 8 &= 2x - 10 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ (x - 2)^2 &= 0 \\ x &= 2 \quad h(2) = p(2) = -6\end{aligned}$$

Da die Gleichung (**) nur eine einzige Lösung hat, ist die Gerade h eine Tangente an die Parabel k. Der Berührungspunkt ist: $P_4 = (2 / -6)$.

Aufgabe 2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -5 & 6 & -4 & 16 \\ 4 & -3 & 2 & -5 & 3 & -2 \\ -2 & 12 & -4 & 8 & -9 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 4 & 7 & 54 \\ -4 & 6 & 8 & -3 & 5 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2 \cdot \text{I} - \text{II} \\ \text{I} + \text{II} \\ \text{III} + 2 \cdot \text{IV} \\ \text{IV} + 2 \cdot \text{I} \end{array} \hat{U} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -5 & 6 & 4 & 16 \\ 0 & 9 & -12 & 17 & -11 & 34 \\ 0 & 15 & -9 & 14 & -13 & 15 \\ 0 & 8 & -10 & 16 & 5 & 107 \\ 0 & 12 & -2 & 9 & -3 & 35 \end{array} \right) \begin{array}{l} 5 \cdot \text{II} - 3 \cdot \text{III} \\ 8 \cdot \text{II} - 9 \cdot \text{IV} \\ 4 \cdot \text{III} - 5 \cdot \text{V} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -5 & 6 & -4 & 16 \\ 0 & 9 & -12 & 17 & -11 & 34 \\ 0 & 0 & -33 & 43 & -16 & 125 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & -133 & -691 \\ 0 & 0 & -26 & 11 & -37 & -115 \end{array} \right) \begin{array}{l} 6 \cdot \text{III} - 33 \cdot \text{IV} \\ 13 \cdot \text{IV} - 3 \cdot \text{V} \end{array} \hat{U}$$



$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -5 & 6 & -4 & 16 \\ 0 & 9 & -12 & 17 & -11 & 34 \\ 0 & 0 & -33 & 43 & -16 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 522 & 4293 & 23553 \\ 0 & 0 & 0 & -137 & -1618 & -8638 \end{array} \right) \quad 137 \cdot \text{IV} + 522 \cdot \text{V} \quad \hat{\mathbf{U}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -5 & 6 & -4 & 16 \\ 0 & 9 & -12 & 17 & -11 & 34 \\ 0 & 0 & -13 & 43 & -16 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 522 & 4293 & 23553 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -256455 & -1282275 \end{array} \right)$$

$$522 d + 21465 = 23553$$

$$522 d = 2088$$

$$d = 4$$

$$-33 c + 172 - 80 = 125$$

$$-33c = 33$$

$$c = -1$$

$$-256455 e = -1282275$$

$$e = 5$$

$$9 b + 12 + 68 - 55 = 34$$

$$9 b = 9$$

$$b = 1$$

$$2 a + 3 + 5 + 24 - 20 = 16$$

$$2 a = 4$$

$$a = 2$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung:

$$\underline{\underline{a = 2, b = 1, c = -1, d = 4 \text{ und } e = 5}}$$



Aufgabe 3

3 a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ Da $y_S = -1,95$ ist, gilt:

$$f(0) = -1,95 \quad \text{also gilt } e = -1,95$$

Damit erhält man: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = f(x) + 1,95 \quad (\alpha)$

Der Graph von f verläuft durch die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 .

Durch Einsetzen der Koordinaten dieser Punkte in die Gleichung (α) entsteht das folgende Gleichungssystem:

$a - b + c - d = -1,25$	(***)	
$16a + 8b + 4c + 2d = 2,8$: 2
$256a + 64b + 16c + 4d = 0$: 4
$625a + 125b + 25c + 5d = -1,25$: 5
$a - b + c - d = -1,25$		
$8a + 4b + 2c + d = 1,4$		$\text{I} + \text{II}$
$64a + 16b + 4c + d = 0$		$\text{III} - \text{II}$
$125a + 25b + 5c + d = -0,25$		$\text{IV} - \text{III}$
$9a + 3b + 3c = 0,15$		
$56a + 12b + 2c = -1,4$		$\text{I} - 3 \cdot \text{II}$
$61a + 9b + c = -0,25$	(**)	$\text{II} - 2 \cdot \text{III}$
$-174a - 24b = 0,9$: 6
$-66a - 6b = -0,9$: (-6)
$29a + 4b = -0,15$		
$11a + b = 0,15$	(*)	$\text{I} - 4 \cdot \text{II}$
$15a = -0,75$		
$a = 0,05$		in (*)
$11 \cdot 0,05 + b = 0,15$	\Leftrightarrow	$b = -0,4$ in (**)
$61 \cdot 0,05 + 9 \cdot (-0,4) + c = -0,25$	\Leftrightarrow	$c = 0,3$ in (***)
$-0,25 - 0,4 - 0,25 + d = -1,25$	\Leftrightarrow	$d = 2$

Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = 0,05x^4 - 0,4x^3 + 0,3x^2 + 2x - 1,95$

3 b) Die Nullstellen der Funktion bleiben erhalten, wenn man die Funktionsgleichung mit einer reellen Zahl $\alpha \neq 0$ multipliziert. Bei der Funktion sei $\alpha = 20$. Es ist also die Gleichung $x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x - 39 = 0$ zu lösen.

Es gilt: $x_{01} = 1$ durch Probe



$$(x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x - 39) : (x-1) = x^3 - 7x^2 - x + 39$$

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 \\ \hline -7x^3 + 6x^2 \\ -7x^3 + 7x^2 \\ \hline -x^2 + 40x \\ -x^2 + x \\ \hline 39x - 39 \\ 39x - 39 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^3 - 7x^2 - x + 39 = 0 \quad \text{Es gilt } x_{02} = 3 \quad \text{durch Probe}$$

$$(x^3 - 7x^2 - x + 39) : (x-3) = x^2 - 4x - 13$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 \\ \hline -4x^2 - x \\ -4x^2 + 12x \\ \hline -13x + 39 \\ -13x + 39 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 13 &= 0 \\ x^2 - 4x &= 13 \\ x^2 - 4x + 4 &= 17 \\ (x-2)^2 &= \pm\sqrt{17} \\ x_{03} &= 2 + \sqrt{17} \approx 6,123 \\ x_{04} &= 2 - \sqrt{17} \approx -2,123 \end{aligned}$$

Die Nullstellen der Funktion f sind: $x_{01} = 1, x_{02} = 3, x_{03} = 2 + \sqrt{17}$

und $x_{04} = 2 - \sqrt{17}$

3 c)

x	-2,3	-2,123	-2	-1,5	-1	-0,5	0
f(x)	1,303	0	-0,75	-2,672	-3,2	-2,822	-1,95
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
f(x)	-0,922	0	0,628	0,85	0,628	0	-0,922
x	4	4,5	5	5,5	6	6,123	6,3
f(x)	-1,95	-2,822	-3,2	-2,672	-0,75	0	1,303



3 d) Der Hochpunkt des Graphen von f hat die Koordinaten $H = (2 / 0,85)$

Die Koordinaten der Tiefpunkte sind: $T_1 = (-1 / -3,2)$ und $T_2 = (5 / -3,2)$

3 e) Die allgemeine Parabelgleichung lautet: $f x^2 + g x + h = k(x)$, $f, g, h \in \mathbf{R}$, $f \neq 0$ durch Einsetzen der Koordinaten der punkte H , T_1 und T_2 erhält man das folgende Gleichungssystem:

$4 f$	$+$	$2 g$	$+$	h	$=$	$0,85$		$\underline{\text{I}} - \underline{\text{II}}$
f	$-$	g	$+$	h	$=$	$-3,2$	$(**)$	$\underline{\text{III}} - \underline{\text{I}}$
$25 f$	$+$	$5 g$	$+$	h	$=$	$-3,2$		
$3 f$	$+$	$3 g$			$=$	$4,05$	$(*)$	$\underline{\text{II}} - \underline{\text{I}}$
$21 f$	$+$	$3 g$			$=$	$-4,05$		
$18 f$					$=$	$-8,1$		
f					$=$	$-0,45$		in $(*)$
$3 \cdot (-0,45)$	$+$	$3 g$			$=$	$4,05$	\Leftrightarrow	$g = 1,8$ in $(**)$
$-0,45 - 1,8$	$+$	h			$=$	$-3,2$	\Leftrightarrow	$h = -0,95$

Die Parabel k , die durch den Hochpunkt H und die beiden Tiefpunkte T_1 und T_2 des Graphen von f verläuft, hat die Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{k(x) = -0,45 x^2 + 1,8 x - 0,95}}$$

3 f)

$$\begin{aligned}
 -0,45 x^2 + 1,8 x - 0,95 &= 0 \\
 x^2 - 4 x + \frac{19}{9} &= 0 \\
 x^2 - 4 x &= -\frac{19}{9} \\
 x^2 - 4 x + 4 &= \frac{36}{9} - \frac{19}{9} \\
 x - 2 &= \pm \sqrt{\frac{17}{9}} \\
 x_{01} &= 2 + \frac{1}{3} \sqrt{17} \approx 3,374 \\
 x_{02} &= 2 - \frac{1}{3} \sqrt{17} \approx 0,626
 \end{aligned}$$

Die Parabel k hat die Nullstellen

$$\underline{\underline{x_{01} = 2 + \frac{1}{3} \sqrt{17} \approx 3,374}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{x_{02} = 2 - \frac{1}{3} \sqrt{17} \approx 0,626}}$$



3 g)

$$g(x) = m x + b$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von T_1 erhält man:

$$-3,2 = -m + b \quad \Leftrightarrow \quad b = m - 3,2 \quad (*)$$

Da T_1 Berührungspunkt der Tangente g an die Parabel k ist, gilt:

$$\begin{aligned} k(x_1) &= g(x_1) \\ -0,45 x_1^2 + 1,8 x_1 - 0,95 &= m x_1 + b \\ x_1^2 - 4 x_1 + \frac{19}{9} &= -\frac{20}{9} m x_1 - \frac{20}{9} b \\ x_1^2 + \frac{20}{9} m x_1 - 4 x_1 &= -\frac{20}{9} b - \frac{19}{9} \\ x_1^2 + \left(\frac{20}{9} m - 4\right) x_1 + \left(\frac{10}{9} m - 2\right)^2 &= -\frac{20}{9} b - \frac{19}{9} + \left(\frac{10}{9} m - 2\right)^2 \\ \left(x_1 + \frac{10}{9} m - 2\right)^2 &= -\frac{20}{9} b - \frac{19}{9} + \frac{100}{81} m^2 - \frac{40}{9} m + \frac{36}{9} \\ x_1 + \frac{10}{9} m - 2 &= \pm \sqrt{\frac{100}{81} m^2 - \frac{40}{9} m - \frac{20}{9} b + \frac{17}{9}} \end{aligned}$$

Da T_1 ein Berührungspunkt ist, darf die quadratische Gleichung nur eine einzige Lösung haben; d.h. der Radikand hat den Wert Null.

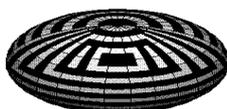
$$\begin{aligned} \frac{100}{81} m^2 - \frac{40}{9} m - \frac{20}{9} b + \frac{17}{9} &= 0 \\ m^2 - 3,6 m - 1,8 b + 1,53 &= 0 \quad \text{mit (*) folgt} \\ m^2 - 3,6 m - 1,8(m - 3,2) + 1,53 &= 0 \\ m^2 - 5,4 m + 7,29 &= 0 \\ (m - 2,7)^2 &= 0 \\ m &= 2,7 \\ b &= 2,7 - 3,2 = -0,5 \end{aligned}$$

Die Tangente g hat die Funktionsgleichung: $g(x) = 2,7 x - 0,5$

$$h(x) = m x + b$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von T_2 erhält man:

$$-3,2 = 5 m + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -5 m - 3,2 \quad (*)$$



Da T_2 Berührungspunkt der Tangente h an die Parabel k ist, gilt:

$$k(x_2) = h(x_2)$$

Aus der gleichen Rechnung wie oben folgt wieder: Da T_2 ein Berührungspunkt ist, darf die quadratische Gleichung nur eine einzige Lösung haben. Das bedeutet aber, dass der Radikand den Wert Null annehmen muß.

$$\begin{aligned} m^2 - 3,6m - 1,8b + 1,53 &= 0 && \text{mit (*) folgt} \\ m^2 - 3,6m - 1,8(-5m - 3,2) + 1,53 &= 0 \\ m^2 + 5,4m + 7,92 &= 0 \\ (m + 2,7)^2 &= 0 \\ m &= -2,7 \\ b &= -5 \cdot (-2,7) - 3,2 = 10,3 \end{aligned}$$

Die Tangente h hat die Funktionsgleichung $h(x) = -2,7x + 10,3$

- 3 h)** Die Tangente w an den Scheitelpunkt $H = (2 / 0,85)$ hat die Steigung 0.
Es gilt: $w(x) = 0,85 = \text{const}$

$$\begin{aligned} g(x) &= w(x) \\ 2,7x - 0,5 &= 0,85 \Leftrightarrow 2,7x = 1,35 \Leftrightarrow x = 0,5 \\ h(x) &= w(x) \\ -2,7x + 10,3 &= 0,85 \Leftrightarrow -2,7x = -9,45 \Leftrightarrow x = 3,5 \end{aligned}$$

Die Koordinaten der beiden Schnittpunkte sind:

$$\underline{\underline{R = (0,5 / 0,85)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S = (3,5 / 0,85)}}$$

- 3 i)** Da die y -Koordinaten der Punkte R und S und ebenfalls die y -Koordinaten der Punkte T_1 und T_2 gleich sind, gilt:

Die Strecken \overline{RS} und $\overline{T_1T_2}$ sind parallel.

Das Viereck T_1T_2SR ist ein Trapez.

- 3 j)** Für den Flächeninhalt A des Trapezes gilt: $A = \frac{1}{2} \left(\overline{RS} + \overline{T_1T_2} \right) \cdot h$

Die Höhe des Trapezes ist der Abstand zwischen den Strecken \overline{RS} und $\overline{T_1T_2}$.

$$A = \frac{1}{2} [(3,5 - 0,5) + (5 - (-1))] \cdot [0,85 - (-3,2)] = \frac{1}{2} (3 + 6) \cdot 6 \cdot 4,05 = 109,35$$

Das Trapez hat den Flächeninhalt $A = 109,35 \text{ FE}$



zu k)

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
k(x)	-6,35	-4,663	-3,2	-1,963	-0,95	-0,163

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5
k(x)	0,4	0,738	0,85	0,738	0,4	-0,163

x	4	4,5	5	5,5	6
k(x)	-0,95	-1,963	-3,2	-4,663	-6,35

zu Aufgabe c) und k)

