# Klausur Nr. 1 1Hj. GkM 11

## Aufgabe 1

Gegeben ist die Parabel $\mathbf{f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 8}$

und die Gerade $\mathbf{t(x) = -x + 12}$

Eine zweite Gerade **g(x)** verläuft durch die Punkte $\mathbf{P_1 = (-2 / -1)}$ und $\mathbf{P_2 = (8 / -6)}$

**a)** Berechnen Sie die Nullstellen der Parabel und geben Sie die Schnittstelle der Parabel mit der y-Achse an.

**b)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S der Parabel.

**c)** Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g(x) und die Koordinaten ihrer Schnittpunkte A und B mit der Parabel.
Bezeichnen Sie mit A den Punkt mit der kleineren x-Koordinate.

**d)** Zeigen Sie, dass die Gerade t(x) eine Tangente an den Graphen der Parabel ist, und geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes C an.

**e)** Die Punkte A,B,C sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Geben Sie die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ des Dreiecks an.

**f)** Fertigen Sie eine Wertetabelle für die Parabel im Bereich $-6{,}5 \leq x \leq 10{,}5$ an, und zeichnen Sie die Parabel, die Geraden t(x) und g(x) sowie das Dreieck in ein Koordinatensystem ein.

## Aufgabe 2

Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte eines Vierecks:
$A = (-8/4)$, $B = (-4/1)$, $C = (6/6)$ und $D = (-5/8)$.
Zeichnen Sie das Viereck in ein Koordinatensystem ein.
Untersuchen Sie durch Rechnung, ob es sich bei diesem Viereck um einen Drachen handelt.
Sie dürfen bei Ihren Berechnungen voraussetzen, dass alle Innenwinkel des Vierecks größer als 0° und kleiner als 180° sind.

## Aufgabe 3

Gegeben ist die Parabel $f(x) = a x^2 + b x + c$

**a)** Leiten Sie eine allgemeine Formel für die Nullstellen der Parabel her.

**b)** Für welche reelle Zahl c hat die Parabel $f(x) = 2x^2 - 28x + c$ genau eine Nullstelle und wie lautet diese ?

# Lösung

## Aufgabe 1

**a)**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
-\frac{1}{4}x^2 + x + 8 &= 0 \\
x^2 - 4x &= 32 \\
x^2 - 4x + 4 &= 36 \\
x - 2 &= \pm 6 \\
x_1 &= 8 \\
x_2 &= -4
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen der Parabel sind: $\underline{\underline{x_1 = 8}}$ und $\underline{\underline{x_2 = -4}}$.

Es gilt: $f(0) = 8$.

Der Graph der Parabel schneidet die y - Achse an der Stelle $\underline{\underline{y_s = 8}}$.

**b)**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{4}x^2 + x + 8 \\
f(x) &= -\frac{1}{4}\left(x^2 - 4x - 32\right) \\
f(x) &= -\frac{1}{4}\left[\left(x-2\right)^2 - 36\right] \\
f(x) &= -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 9 \\
S &= (2 / 9)
\end{aligned}
$$

Die Parabel hat den Scheitelpunkt $\underline{\underline{S = (2 / 9)}}$.

**c)**

$$m = \frac{-6+1}{8+2} = \frac{-5}{-10} = -\frac{1}{2}$$

Da die Gerade g durch $P_1$ verläuft, gilt:

$$-1 = -\frac{1}{2}(-2) + b \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -2$$

Die Funktionsgleichung für die Gerade g lautet: $\underline{\underline{g(x) = -\frac{1}{2}x - 2}}$

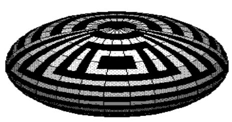
$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
-\frac{1}{4}x^2 + x + 8 &= -\frac{1}{2}x - 2 \\
-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x &= -10 \\
x^2 - 6x &= 40 \\
x^2 - 6x + 9 &= 49 \\
x - 3 &= \pm 7 \\
x_1 &= 10 \\
x_2 &= -4
\end{aligned}$$

$$f(10) = -7 \qquad\qquad f(-4) = 0$$

Die Gerade g schneidet den Graphen der Parabel in den Punkten $\underline{\underline{A = (-4\ /\ 0)}}$ und $\underline{\underline{B = (10\ /\ -7)}}$.

**d)**

$$\begin{aligned}
f(x) &= t(x) \\
-\frac{1}{4}x^2 + x + 8 &= -x + 12 \\
-\frac{1}{4}x^2 + 2x &= 4 \\
x^2 - 8x &= 16 \\
x^2 - 8x + 16 &= 0 \\
x &= 4
\end{aligned}$$



**Fortsetzung 1d**

Da die quadratische Gleichung nur eine Lösung besitzt, berührt die Gerade t den Graphen der Parabel in einem Punkt. Die Gerade t ist also eine Tangente an den Funktionsgraphen der Parabel.

Der Berührpunkt C hat die Koordinaten $\underline{\underline{C = (4 / 8).}}$

**e)** $a = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4 - 10)^2 + (8 + 7)^2} = \sqrt{36 + 25}$

$a = \sqrt{261} \approx 16{,}155$

Die Dreieckseite $a = \overline{BC}$ hat die Länge $\underline{\underline{a = 16{,}155 \text{ LE.}}}$

$b = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4 + 4)^2 + 8^2} = \sqrt{64 + 64}$

$b = \sqrt{128} \approx 11{,}314$

Die Dreieckseite $b = \overline{AC}$ hat die Länge $\underline{\underline{b = 11{,}314 \text{ LE.}}}$

$c = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(10 + 4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{169 + 49}$

$c = \sqrt{245} \approx 15{,}652$

Die Dreieckseite $c = \overline{AB}$ hat die Länge $\underline{\underline{c = 15{,}652 \text{ LE.}}}$

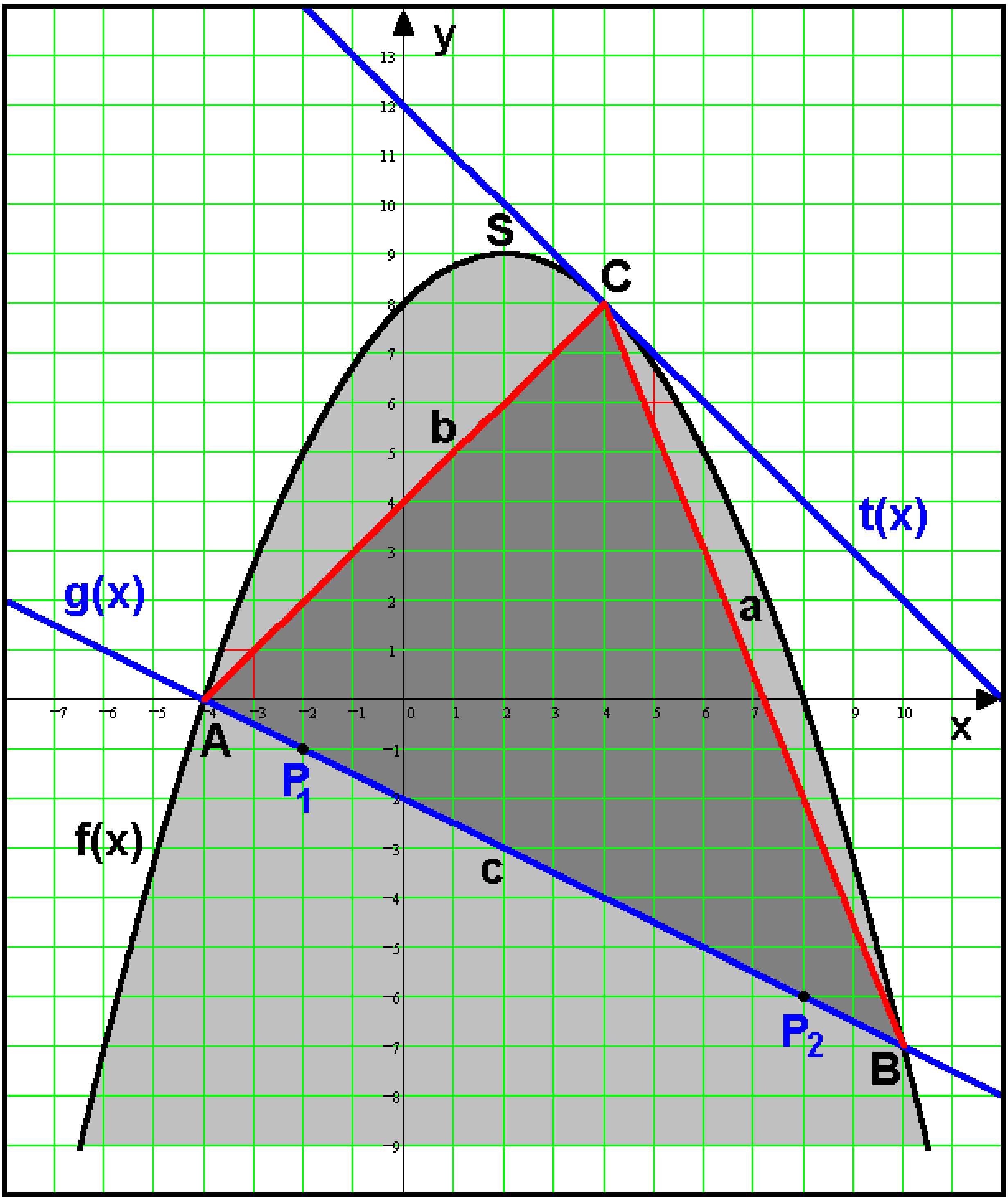
**f)**

| **x** | -6,5 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | -9,0625 | -7 | -3,25 | 0 | 2,75 | 5 | 6,75 |

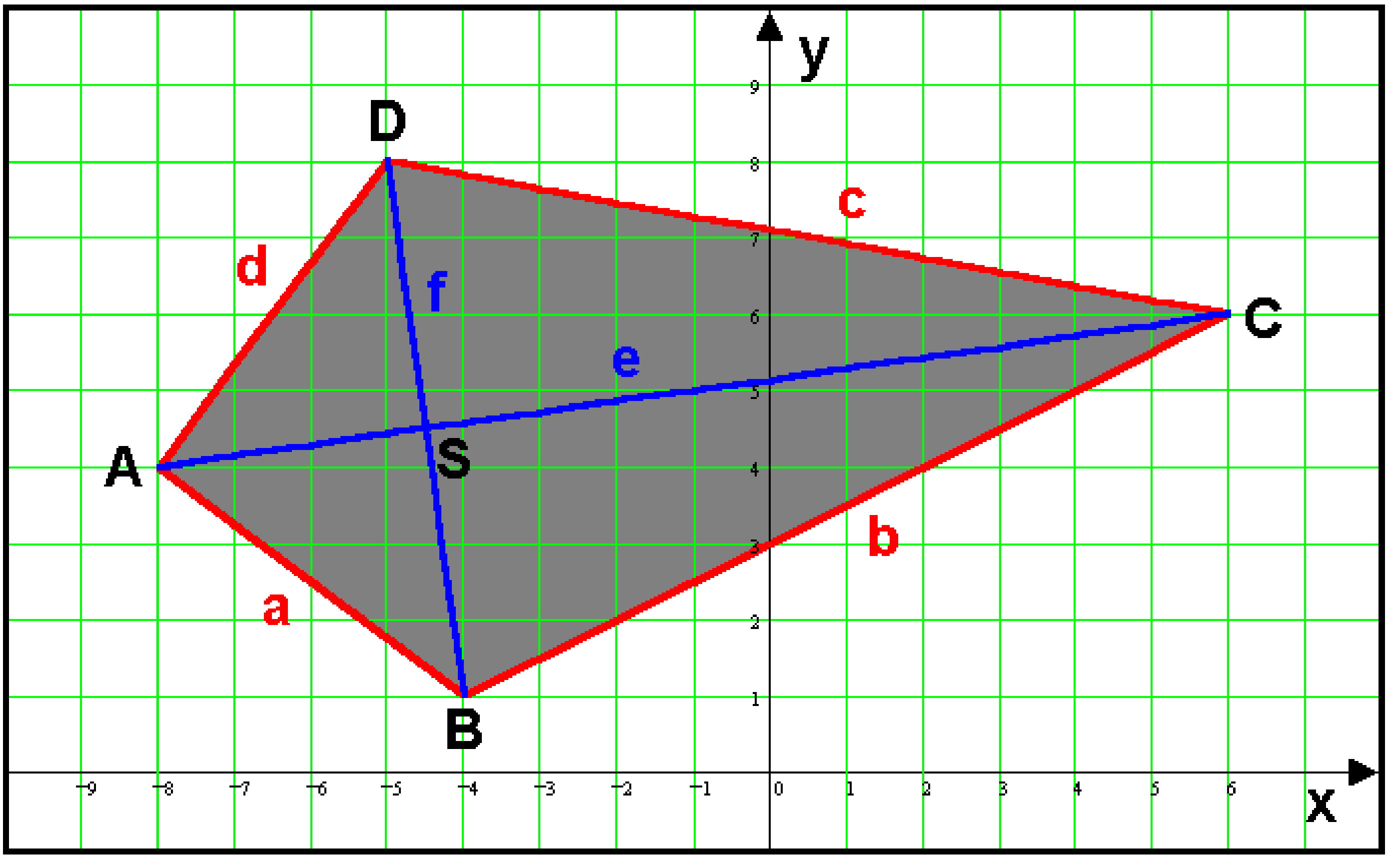
| **x** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | 8 | 8,75 | 9 | 8,75 | 8 | 6,75 |

| **x** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | 5 | 2,75 | 0 | -3,25 | -7 | -9,0625 |

**zu Aufgabe 1f)**



# Aufgabe 2




**1. Lösungsmöglichkeit:**

Es ist zu zeigen:
Die Diagonalen $e = \overline{AC}$ und $f = \overline{BD}$ schneiden sich senkrecht in einem Punkt S. Der Schnittpunkt S ist der Mittelpunkt einer der beiden Diagonalen.

Die Steigung der Diagonalen e ist: $m_e = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{6-4}{6+8} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$

Die Steigung der Diagonalen f ist: $m_f = \dfrac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \dfrac{8-1}{-5+4} = \dfrac{7}{-1} = -7$

Es gilt: $m_e = -\dfrac{1}{m_f} \quad \Rightarrow$

<u>Die Diagonalen e und f des Vierecks schneiden sich senkrecht in einem Punkt S.</u>

Sei S Mittelpunkt der Strecke f = $\overline{BD}$.

$$S = \left(\frac{1}{2}\left(x_B + x_D\right) \middle| \frac{1}{2}\left(y_B + y_D\right)\right) = \left[\frac{1}{2}\left(-4 - 5\right) \middle| \frac{1}{2}\left(1 + 8\right)\right] = \left(-4{,}5 \middle| -4{,}5\right)$$

Es ist noch zu zeigen, dass S auf der Diagonalen e liegt.

$$g_e(x) = \frac{1}{7}x + b$$

Da der Punkt C = (6/6) auf dieser Geraden liegt, gilt:

$$6 = \frac{1}{7} \cdot 6 + b \quad \Leftrightarrow \quad 6 = \frac{6}{7} + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 5\frac{1}{7}$$

Die Gerade $g_e$, auf der die Diagonale e liegt, hat die Gleichung:

$$g_e(x) = \frac{1}{7}x + 5\frac{1}{7}$$

Wenn der Punkt S auf der Diagonalen e liegt, so müssen seine Koordinaten diese Funktionsgleichung erfüllen. Durch Einsetzen der Koordinaten von S erhält man:

$$4\frac{1}{2} = \frac{1}{7} \cdot (-4\frac{1}{2}) + 5\frac{1}{7} \quad \Leftrightarrow \quad 4\frac{1}{2} = \frac{1}{7} \cdot (-\frac{9}{2}) + \frac{36}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{2} = -\frac{9}{14} + \frac{72}{14} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{2} = \frac{63}{14} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

<u>Der Mittelpunkt der Diagonalen f liegt auch auf der Diagonalen e.</u>
<u>Das Viereck ABCD ist also ein Drachen.</u>

**2. Lösungsmöglichkeit**

Es ist zu zeigen, dass zwei anliegende Seiten jeweils gleich lang sind, d.h.
$\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\overline{BC} = \overline{CD}$ bzw. a = d und b = c.

$$\overline{AB} = a = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4 - (-8))^2 + (1 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{AD} = d = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-5 - (-8))^2 + (8 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{BC} = b = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(6 - (-4))^2 + (6 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{100 + 125} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$\overline{CD} = c = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(-5 - 6)^2 + (8 - 6)^2}$$
$$= \sqrt{(-11)^2 + 2^2} = \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

<u>Da zwei anliegende Seiten jeweils gleich lang sind, handeltes sich bei dem Viereck ABCD um einen Drachen.</u>

**3. Lösungsmöglichkeit**

Es ist zu zeigen, dass die beiden anliegenden Seiten a und d gleich lang sind und dass sich die beiden Diagonalen e und f rechtwinklig schneiden. (Ergebnisse s. o.)

**4. Lösungsmöglichkeit**

Es ist zu zeigen, dass die beiden anliegenden Seiten b und c gleich lang sind und dass sich die beiden Diagonalen e und f rechtwinklig schneiden. (Ergebnisse s.o.)

**5. Lösungsmöglichkeit**

Es ist zu zeigen, dass die beiden anliegenden Seiten a und d gleich lang - und die Winkel k ABC = β und k CDA = δ gleich groß sind.

**6. Lösungsmöglichkeit**

Es ist zu zeigen, dass die beiden anliegenden Seiten a und d gleich lang - und die Winkel k ABC = β und k CDA = δ gleich groß sind.

( Ergebnis: Für die Winkelβ und δ gilt: $\beta = \delta = 116{,}56505° \approx 117°$).

## Aufgabe 3

**a)**

$$f(x) = 0$$

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

$$a\,x^2 + b\,x = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2} = \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2\,a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2\,a} + \sqrt{\frac{b^2}{4\,a^2}}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2\,a} - \sqrt{\frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{c}{a}}$$

**b)** Die Parabel hat genau eine Nullstelle, wenn der Radikand (Term unter dem Wurzelzeichen) den Wert Null annimmt, d. h.

$$\frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4\,a^2} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{b^2}{4\,a}$$

Mit $a = 2$ und $b = -28$ erhält man:

$$c = \frac{(-28)^2}{4 \cdot 2} = \frac{784}{8} = 98$$

Für $\underline{\underline{c = 98}}$ hat die Parabel genau eine Nullstelle.

$$x = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{-28}{2 \cdot 2} = \frac{28}{4} = 7$$

Die einzige Nullstelle der Parabel $f(x) = 2\,x^2 - 28\,x + 98$ lautet $\underline{\underline{x = 7}}$.