Klausur Nr. 2 1. Hj GkM 11

Aufgabe 1

Gegeben ist die Parabel $\mathbf{f(x) = \frac{1}{8}\,x^2}$ und die Gerade $\mathbf{g(x) = -x - 6}$

a) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Gerade g(x) eine Passante zur Parabel f(x) ist.

b) Die Gerade t(x) verläuft senkrecht zur Geraden g und berührt den Graphen der Parabel f im Punkt B.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für die Tangente t(x), die Koordinaten des Berührpunktes B und die Koordinaten des Punktes A, in dem sich die Geraden g und t schneiden.

c) Eine Gerade h verläuft durch den Berührpunkt B und den Brennpunkt F der Parabel und schneidet die Gerade g im Punkt C.
Geben Sie die Funktionsgleichung von h an, und bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes C.

d) Spiegelt man den Punkt A an der Geraden h, so erhält man den Spiegelpunkt A*.
Geben Sie die Koordinaten von A* an.

e) Die Punkte A,B,A*,C sind die Eckpunkte eines Vierecks.
Um was für ein Viereck handelt es sich ?
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks.

f) Fertigen Sie eine Wertetabelle $(-8 \le x \le 8)$ für die Parabel f an.
Zeichnen Sie die Parabel f, die Geraden g, t, h und das Viereck in ein Koordinatensystem ein.

Aufhabe 2

Gegeben ist die Parabel $\mathbf{f(x) = x^2 - 6x + 8}$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für die Tangente t, die den Graphen der Parabel im Punkt **B = (5 / f (5))** berührt.

Aufgabe 3

Gegeben ist die ganze rationale Funktion vierten Grades

$$\mathbf{f(x) = x^4 - 15x^3 + 58x^2 - 18x - 92}$$

Bestimmen Sie die Nullstellen dieser Funktion.

Aufgabe 4

Eine Parabel $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \quad a,b,c \in R,\ a \neq 0$ hat den Scheitelpunkt $S = (4\ /\ 8)$. Der Graph der Parabel verläuft außerdem durch den Punkt $P = (-6\ /\ -67)$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel.

Aufgabe 5

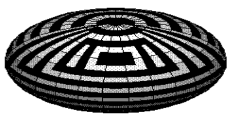
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme, indem Sie die zugehörige Matrix zunächst auf "Dreieckgestalt" (Gauß-Verfahren) bringen.

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7x & + & 3y & + & 2z & = & -5 \\ 9x & + & 7y & - & z & = & -18 \\ 39x & + & 5y & + & 4z & = & -87 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & 5b & + & 7c & + & 3d & = & 40 \\ 3a & + & 9b & + & 3c & - & 7d & = & -52 \\ -6a & - & 24b & - & 9c & + & 18d & = & 132 \\ -3a & - & 6b & + & 6c & + & 9d & = & 114 \end{array}$$



L ö s u n g

Aufgabe 1

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{8}x^2 &= -x-6 \\
\frac{1}{8}x^2 + x &= -6 \\
x^2 + 8x &= -48 \\
x^2 + 8x + 16 &= -32 \\
x + 4 &= -\sqrt{32}
\end{aligned}
$$

Da der Radikand negativ ist, existiert keine Lösung; d.h. es gibt keinen Schnittpunkt zwischen der Geraden g und der Parabel f.
Die Gerade g ist folglich eine Passante.

b) $t(x) \perp g(x) \quad \Rightarrow \quad m_t = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-1} = 1$

Die Tangente $t(x)$ hat die Steigung $m_t = 1$ und läßt sich folglich in der Form $t(x) = x + b$ darstellen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= t(x) \\
\frac{1}{8}x^2 &= x + b \\
\frac{1}{8}x^2 - x &= b \\
x^2 - 8x &= 8b \\
x^2 - 8x + 16 &= 8b + 16 \\
x - 4 &= \pm\sqrt{8b + 16} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Wenn $t(x)$ eine Tangente ist, muß der radikand den Wert 0 annehmen.

$$8b + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -2$$

Die Gleichung der Tangente lautet: $\underline{\underline{t(x) = x - 2}}$

Durch Einsetzen in (*) erhält man: $x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

$$t(4) = f(4) = 2$$

Der Berührpunkt B hat die Koordinaten $\underline{\underline{B = (4 / 2)}}$

$$\begin{aligned} t(x) &= g(x) \\ x - 2 &= -x - 6 \\ 2x &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$t(-2) = g(-2) = -4$$

Der Schnittttpunk A hat die Koordinaten $\underline{\underline{A = (-2 / -4)}}$

c) Für die Koordinaten des Brennpunktes einer Parabel der Form

$f(x) = a x^2$ gilt: $F = \left(0 \,\middle|\, \frac{1}{4a}\right)$ mit $a = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad F = (0 / 2)$

Der Berührpunkt ist $B = (4 / 2)$

Da beide Punkte die y-Koordinate $y = 2$ haben, ist die Gerade h, die durch F und B verläuft, eine Parallele zur x-Achse.

Die Funktionsgleichung der Geraden h lautet: $\underline{\underline{h(x) = 2}}$

$$g(x) = h(x)$$

$$-x - 6 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = -8$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $\underline{\underline{C = (-8 / 2)}}$

d) Die Koordinaten des Spiegelpunktes sind $\underline{\underline{A^* = (-2 / 8)}}$ (s. Zeichnung)

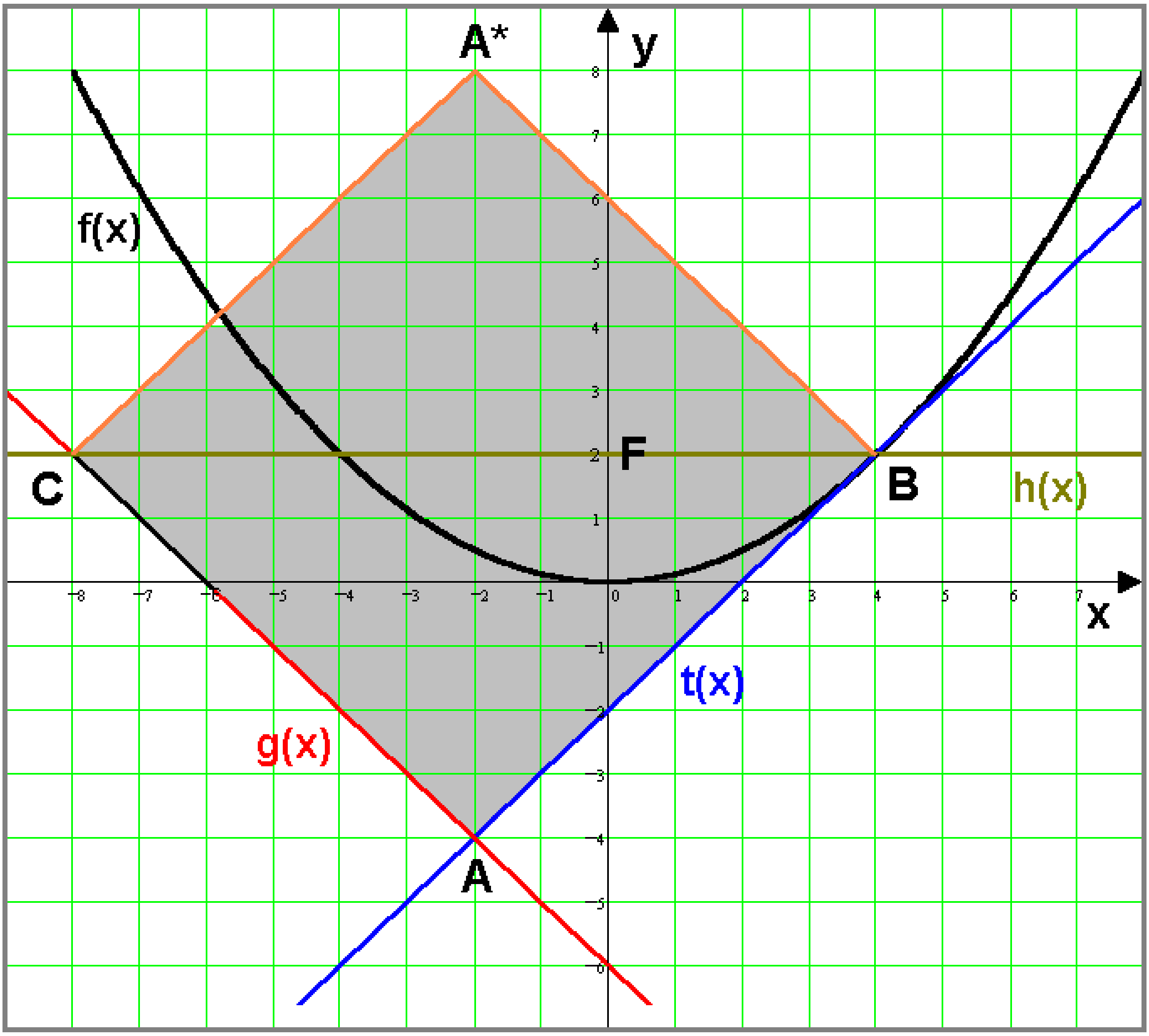
e) Das Viereck ABA^*C ist ein Quadrat.

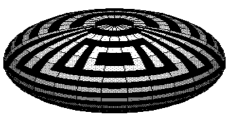
<u>Begründung</u>: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, weil $g \perp t$ ist.

Außerdem gilt: $\overline{AC} = \overline{AB}$

Spiegelt man ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck an seiner Hypothenuse, so erhält man ein Quadrat.

zu Aufgabe 1f





Es ist $d = \overline{CB} = 12$ LE die Diagonale dieses Quadrates.

Für den Flächeninhalt A gilt dann:

$$A = \frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 = \frac{1}{2} \cdot 144 = 72$$

Das Quadrat hat den Flächeninhalt $\underline{\underline{A = 72 \text{ FE}}}$

f)

x	0	± 0,5	± 1	± 1,5	± 2	± 2,5
f(x)	0	0,03125	0,125	0,28125	0,5	0,78125

x	± 3	± 3,5	± 4	± 4,5	± 5	5,5
f(x)	1,125	1,53125	2	2,53125	3,125	3,78125

x	± 6	± 6,5	± 7	± 7,5	± 8
f(x)	4,5	5,28125	6,125	7,03125	8

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 8 \\ f(5) &= 20 - 30 + 8 = 3 \\ B &= (5 / 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(x) &= m x + b \\ 3 &= 5 m + b \\ b &= 3 - 5 m \qquad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= t(x) \\ x^2 - 6x + 8 &= m x + b \\ x^2 - 6x - m x &= b - 8 \\ x^2 - \left(6 + m\right)x &= b - 8 \\ x^2 - \left(6 + m\right)x + \left(\frac{6 + m}{2}\right)^2 &= b - 8 + \left(\frac{6 + m}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Da t(x) Tangente ist, gilt:

$$b - 8 + \left(\frac{6 + m}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{mit } (*) \quad \Rightarrow$$

$$3 - 5m - 8 + 9 + 3m + \frac{1}{4}m^2 = 0$$

$$\frac{1}{4}m^2 - 2m + 4 = 0$$

$$m^2 - 8m + 16 = 0$$

$$(m - 4)^2 = 0$$

$$m = 4$$

Durch Einsetzen in (*) erhält man:

$$b = 3 - 20 = 17$$

Die Funktionsgleichung für die Tangente t, die den Graphen von f im Punkt $\underline{\underline{B = (5 / 3)}}$ berührt, lautet: $\underline{\underline{t(x) = 4x - 17}}$

Aufgabe 3

$\underline{f(-1) = 1 + 15 + 58 + 18 - 92 = 92 - 92 = 0}$

$$(x^4 - 15x^3 + 58x^2 - 18x - 92) : (x + 1) = x^3 - 16x^2 + 74x - 92 := k(x)$$

$\underline{x^4 + x^3}$

$-16x^3 + 58x^2$

$\underline{-16x^3 - 16x^2}$

$74x^2 - 18x$

$\underline{74x^2 + 74x}$

$-92x - 92$

$\underline{-92x - 92}$

0

$$k(2) = 8 - 64 + 148 - 92 = 156 - 156 = 0$$

$$(x^3 - 16x^2 + 74x - 92) : (x - 2) = x^2 - 14x + 46$$

$\underline{x^3 - 2x^2}$

$-14x^2 + 74x$

$\underline{-14x^2 + 28x}$

$46x - 92$

$\underline{46x - 92}$

0

$$x^2 - 14x + 46 = 0$$

$$x^2 - 14x = -46$$

$$x^2 - 14x + 49 = 3$$

$$x - 7 = \pm\sqrt{3}$$

$$x_3 = 7 + \sqrt{3}$$

$$x_4 = 7 - \sqrt{3}$$

Die Nullstellen der ganzen rationalen Funktion vierten Grades sind:
$\underline{\underline{x_{01} = -1,\ x_{02} = 2,\ x_{03} = 7 + \sqrt{3}}}$ und $\underline{\underline{x_{04} = 7 - \sqrt{3}}}$.

Aufgabe 4

Der Graph der Parabel ist symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse, die durch den Scheitelpunkt verläuft. Folglich erhält man einen weiteren Punkt P^*, der auf dem Graphen der Parabel liegt, indem man P an dieser geraden spiegelt. Es gilt: $P^* = (14 / -67)$

Durch Einsetzen der Koordinaten von S, P und P^* in die Parabelgleichung $a x^2 + b x + c = f(x)$ erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
16a & + & 4b & + & c & = & 8 & (**) \\
36a & + & -6b & + & c & = & -67 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
196a & + & 14b & + & c & = & -67 & \mathrm{III} - \mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl}
20a & + & 10b & = & -75 & \mid :\ 5 \\
160a & - & 20b & = & 0 & \mid :\ 10
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcr}
4a & - & 2b & = & -15 \\
16a & + & 2b & = & 0
\end{array}\right\} (+) \qquad (*)$$

$$20a = \frac{3}{4} \qquad \text{in } (*) \text{ ergibt:}$$

$$\begin{array}{rcrcr}
16 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) & + & 2b & = & 0 \\
 & & 2b & = & 12 \\
 & & b & = & 6
\end{array}$$

in (∗∗) ergibt :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 16 \cdot (-\frac{3}{4}) & + & 24 & + & c & = & 8 \\ & & 12 & + & c & = & 8 \\ & & & & c & = & -4 \end{array}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - 4}}$

Aufgabe 5 a

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7x & + & 3y & + & 2z & = & -5 \\ 9x & + & 7y & - & z & = & -18 \\ 39x & + & 5y & + & 4z & = & -87 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 7 & 3 & -5 \\ -1 & 9 & 7 & -18 \\ 4 & 39 & 5 & -87 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \underline{\overline{\text{I}}} + 2 \cdot \underline{\overline{\text{II}}} \\ \underline{\overline{\text{III}}} - 2 \cdot \underline{\overline{\text{I}}} \end{array} \quad \text{Û} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 25 & 17 & -41 \\ 0 & 25 & -1 & -77 \end{array}\right) \quad \underline{\overline{\text{II}}} - \underline{\overline{\text{III}}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 25 & 17 & -41 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (**) \\ (*) \\ \end{array}$$

$18y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 \quad \text{in } (*) \quad \Rightarrow \quad 25x + 34 = -41 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \quad \text{in } (**) \quad \Rightarrow$
$2z + 7 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad 2z - 15 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad 2z = 10 \quad \Leftrightarrow \quad z = 5$

Das Gleichungssystem hat die Lösung: $\underline{\underline{x = -3, \quad y = 2, \quad z == 5}}$

Aufgabe 5 b

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & 5b & + & 7c & + & 3d & = & 40 \\ 3a & + & 9b & + & 3c & - & 7d & = & -52 \\ -6a & - & 24b & - & 9c & + & 18d & = & 132 \\ -3a & - & 6b & + & 6c & + & 9d & = & 114 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 7 & 3 & 40 \\ 3 & 9 & 3 & -7 & -52 \\ -6 & -24 & -9 & 18 & 132 \\ -3 & -6 & 6 & 9 & 114 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \underline{\overline{\text{II}}} - 3 \cdot \underline{\overline{\text{I}}} \\ \underline{\overline{\text{III}}} + 2 \cdot \underline{\overline{\text{II}}} \\ \underline{\overline{\text{IV}}} + \underline{\overline{\text{II}}} \end{array} \quad \text{Û} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 7 & 3 & 40 \\ 0 & -6 & -18 & -16 & -172 \\ 0 & -6 & -3 & 4 & 28 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & 62 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ \\ \underline{\overline{\text{II}}} - \underline{\overline{\text{III}}} \\ 2 \cdot \underline{\overline{\text{IV}}} + \underline{\overline{\text{III}}} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 7 & 3 & 70 \\ 0 & -6 & -18 & -16 & -172 \\ 0 & 0 & -15 & -20 & -200 \\ 0 & 0 & 15 & 8 & 152 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \overline{\underline{\text{IV}}} + \overline{\underline{\text{III}}} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 7 & 3 & 40 \\ 0 & -6 & -18 & -16 & -172 \\ 0 & 0 & -15 & -20 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -48 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overline{\underline{\text{I}}} \\ \overline{\underline{\text{II}}} \\ \overline{\underline{\text{III}}} \\ \overline{\underline{\text{IV}}} \end{array}$$

Aus $\overline{\underline{\text{IV}}}$ folgt: $-12\,d = -48 \;\Leftrightarrow\; d = 4$ in $\overline{\underline{\text{III}}}$ ergibt:

$-15\,c - 80 = -200 \;\Leftrightarrow\; -15\,c = -120 \;\Leftrightarrow\; c = 8$ in $\overline{\underline{\text{II}}}$ ergibt:

$-6\,b - 144 - 64 = -172 \;\Leftrightarrow\; -6\,b = 36 \;\Leftrightarrow\; b = -6$ in $\overline{\underline{\text{I}}}$ ergibt:

$a - 30 + 56 + 12 = 40 \;\Leftrightarrow\; a + 38 = 40 \;\Leftrightarrow\; a = 2$

Das Gleichungssystem hat die Lösung: $\underline{\underline{a = 2,\ \ b = -6,\ \ c = 8,\ \ d = 4}}$