Mathematikklausur Nr. 1 2. Hj Gk M 11

Aufgabe 1

a) Gegeben sind die Punkte $B = (-1/10)$, $S_1 = (-2/3)$ und $S_2 = (6/9)$.
Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises, auf dem diese drei Punkte liegen. Geben Sie die Koordinaten des Kreismittelpunktes M und den Radius r des Kreises an.
(Ergebnis: Kreisgleichung $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 25$)

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t, die den Kreis im Punkt $B = (-1/10)$ berührt.

c) Gegeben ist die Gerade $g(x) = \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}$
Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Kreises mit dieser Geraden.

d) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem den Kreis, die Tangente t, die Gerade g und das Dreieck mit den Eckpunkten B, S_1 und S_2 ein.

e) Weisen Sie nach,dass das Dreieck $\Delta B,S_1,S_2$ gleichschenklig und rechtwinklig ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 2

Die beiden ersten Klassenarbeiten eines Halbjahres im Fach Mathematik wurden folgendermaßen bewertet:

1. Arbeit

sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend	mangelhaft	ungenügend
2 x	7 x	12 x	6 x	4 x	1 x

2. Arbeit

sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend	mangelhaft	ungenügend
4 x	3 x	15 x	7 x	1 x	2 x

a) Zeichnen Sie für die Notenverteilung ein Säulendiagramm, das beide Klassenarbeiten erfaßt.

b) Berechnen Sie für beide Klassenarbeiten die Durchschnittsnote und die mittlere lineare Abweichung von ihr.

Aufgabe 3

Von 5 Personen werden die Körpergröße und das Gewicht gemessen.
Man erhält die folgende Tabelle.

Größe x	160	163	172	175	180
Gewicht y	58	56	64	68	79

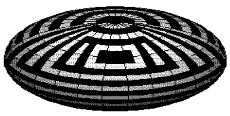
Bestimmen Sie zu diesen Werten die Regressionsgerade.
Zeichnen Sie die Meßwerte mit der Regressionsgeraden in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente

a) an den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $P = (1/1)$

b) an den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Punkt $P = (4/2)$



L ö s u n g e n

Aufgabe 1 a)

Die allgemeine Kreisgleichung lautet: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

Durch Einsetzen der Koordinaten der drei gegebenen Punkte erhält man:

$$
\begin{array}{lcl}
(-1 - x_M)^2 + (10 - y_M)^2 & = & r^2 \\
(-2 - x_M)^2 + (3 - y_M)^2 & = & r^2 \\
(6 - x_M)^2 + (9 - y_M)^2 & = & r^2
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
(=) \\
\\
(=) \qquad (**)
\end{array}
$$

$$(-1 - x_M)^2 + (10 - y_M)^2 = (-2 - x_M)^2 + (3 - y_M)^2$$
$$(-2 - x_M)^2 + (3 - y_M)^2 = (6 - x_M)^2 + (9 - y_M)^2$$

$$x_M^2 + 2\,x_M + 1 + y_M^2 - 2\,y_M + 100 = x_M^2 + 4\,x_M + 4 + y_M^2 - 6\,y_M + 9$$
$$x_M^2 + 4\,x_M + 4 + y_M^2 - 6\,y_M + 9 = x_M^2 - 12\,x_M + 36 + y_M^2 - 18\,y_M + 81$$

$$2\,x_M - 20\,x_M + 101 = 4\,x_M - 6\,y_M + 13$$
$$4\,x_M - 6\,y_M + 13 = -12\,x_M - 18\,y_M + 117$$

$$2\,x_M + 14\,y_M = 88 \quad |\cdot 2$$
$$16\,x_M + 12\,y_M = 104 \quad |:4$$

$$4\,x_M + 28\,y_M = 176$$
$$4\,x_M + 3\,y_M = 26 \qquad (*)$$

$$25\,y_M = 150$$
$$y_M = \underline{\underline{6}} \qquad \text{in } (*) \Rightarrow$$

$$4\,x_M + 3 \cdot 6 = 26$$
$$4\,x_M = 8$$
$$x_M = \underline{\underline{2}} \qquad \text{in } (**) \Rightarrow$$

$$(6 - 2)^2 + (9 - 6)^2 = r^2$$
$$4^2 + 3^2 = r^2$$
$$r^2 = 25$$
$$r = \underline{\underline{5}}$$

Die Koordinaten des Kreismittelpunktes lauten: $\underline{\underline{M = (2 / 6)}}$

Der Kreis hat den Radius $\underline{\underline{r = 5\,\text{LE}}}$

Aufgabe 1b)

$$m_{M,B} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{6 - 10}{2 - (-1)} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

Da die Tangente, die den Kreis im Punkt B berührt, senkrecht zum Radius $r_{M,B}$ steht, gilt für ihre Steigung:

$$m_t = -\frac{1}{m_{M,B}} = \frac{3}{4}$$

Die Koordinaten des Punktes B = (−1 / 10) müssen die Tangentengleichung erfüllen. Folglich gilt:

$$m_t \cdot x + b \quad = \quad t(x)$$

$$\frac{3}{4} \cdot (-1) \quad = \quad 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 10\frac{3}{4}$$

Die Tangentengleichung lautet: $\underline{\underline{t(x) = \frac{3}{4}\,x + 10\frac{3}{4}}}$

Aufgabe 1c)

$$g(x) = \frac{3}{4}\,x + 4\frac{1}{2} := y$$

Durch Einsetzen in die Kreisgleichung erhält man:

$$\begin{aligned}
(x - 2)^2 + \left(\frac{3}{4}\,x + 4\frac{1}{2} - 6\right)^2 &= 25 \\
(x - 2)^2 + \left(\frac{3}{4}\,x - 1\frac{1}{2}\right)^2 &= 25 \\
x^2 + 4x + 4 + \frac{9}{16}\,x^2 - \frac{9}{4}\,x + 2\frac{1}{4} &= 25 \\
\frac{25}{16}\,x^2 - \frac{25}{4}\,x + \frac{25}{4} &= 25 \\
\frac{25}{16}\,x^2 - \frac{25}{4}\,x &= \frac{75}{4} \\
x^2 - 4x &= 12 \\
x^2 - 4x + 4 &= 16 \\
x - 2 &= \pm 4 \\
x_1 &= 6 \\
x_2 &= -2
\end{aligned}$$

Fortsetzung von Aufgabe 1c)

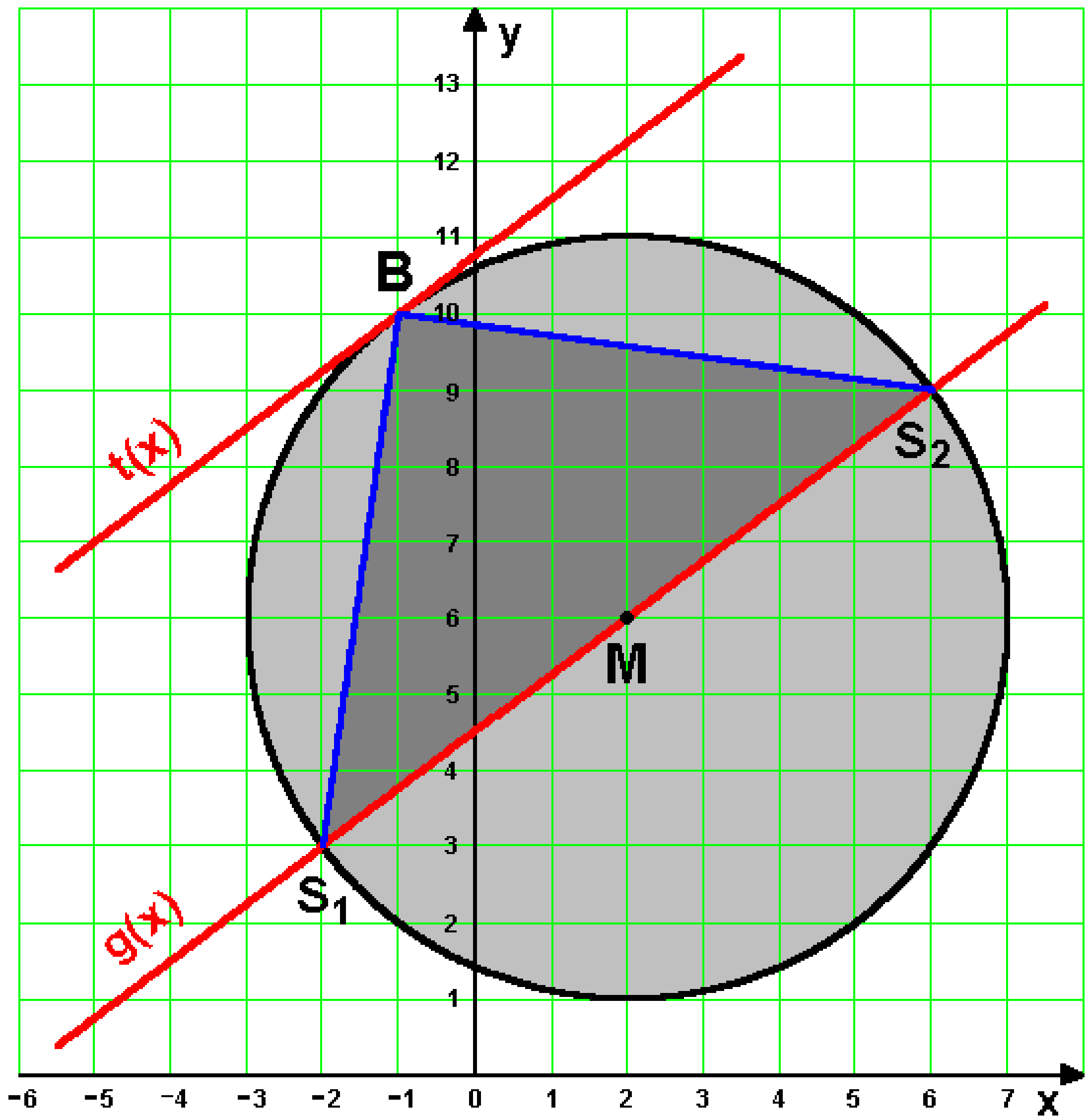
$$g(x_1) \ = \ g(6) \ = \ \frac{3}{4} \cdot 6 \ + \ 4\frac{1}{2} \ = \ \frac{18}{2} \ = \ 9$$

$$g(x_2) \ = \ g(-2) \ = \ \frac{3}{4} \cdot (-2) \ + \ 4\frac{1}{2} \ = \ \frac{6}{2} \ = \ 3$$

Die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden haben die Koordinaten

$$\underline{\underline{S_1 \ = \ (6 \ / \ 9)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S_2 \ = \ (-2 \ / \ 3)}}$$

Aufgabe 1d)



Aufgabe 1e)

M = (2 / 6)

$$g(2) = \frac{3}{4} \cdot 2 + 4\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 6$$

Da $M \in g$ ist, gilt: Die Strecke $\overline{S_1S_2}$ ist ein Durchmesser des Kreises; d. h.

$$\overline{S_1S_2} = 2\,r = 10\,\text{LE}$$

$$\overline{BS_1} = \sqrt{(x_B - x_{S_1})^2 + (y_B - y_{S_1})^2} = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (10 - 3)^2} = \sqrt{1 + 49}$$

$$\overline{BS_1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{BS_2} = \sqrt{(x_B - x_{S_2})^2 + (y_B - y_{S_2})^2} = \sqrt{(-1 - 6)^2 + (10 - 9)^2} = \sqrt{49 + 1}$$

$$\overline{BS_2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Es gilt: $\overline{BS_1} = \overline{BS_2}$

Das Dreieck $\Delta\, BS_1S_2$ ist also <u>gleichschenklig</u>.

$$(\overline{BS_1})^2 + (\overline{BS_2})^2 = (\overline{S_1S_2})^2$$

$$\left(\sqrt{50}\right)^2 + \left(\sqrt{50}\right)^2 = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad 50 + 50 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad 100 = 100$$

Da der Satz des Pythagoras erfüllt ist, handelt es sich um ein <u>rechtwinkliges Dreieck</u>.

Die Rechtwinkligkeit des Dreiecks kann auch mit Hilfe des Thalessatzes nachgewiesen werden. Da $\overline{S_1S_2}$ ein Durchmesser des Kreises ist, und der Punkt B auf dem Kreis liegt, gilt:
Der Winkel È S_2BS_1 ist ein <u>rechter Winkel</u>.

Außerdem kann man die Rechtwinkligkeit nachweisen, in dem man mit Hilfe der Steigungen zeigt, dass die Strecken $\overline{BS_1}$ und $\overline{BS_2}$ senkrecht zu einander sind.

$$m_{B,S_1} = \frac{y_B - y_{S_1}}{x_B - x_{S_1}} = \frac{10 - 3}{-1 - (-2)} = 7 \qquad m_{BS_2} = \frac{y_B - y_{S_2}}{x_B - x_{S_2}} = \frac{10 - 9}{-1 - 6} = -\frac{1}{7}$$

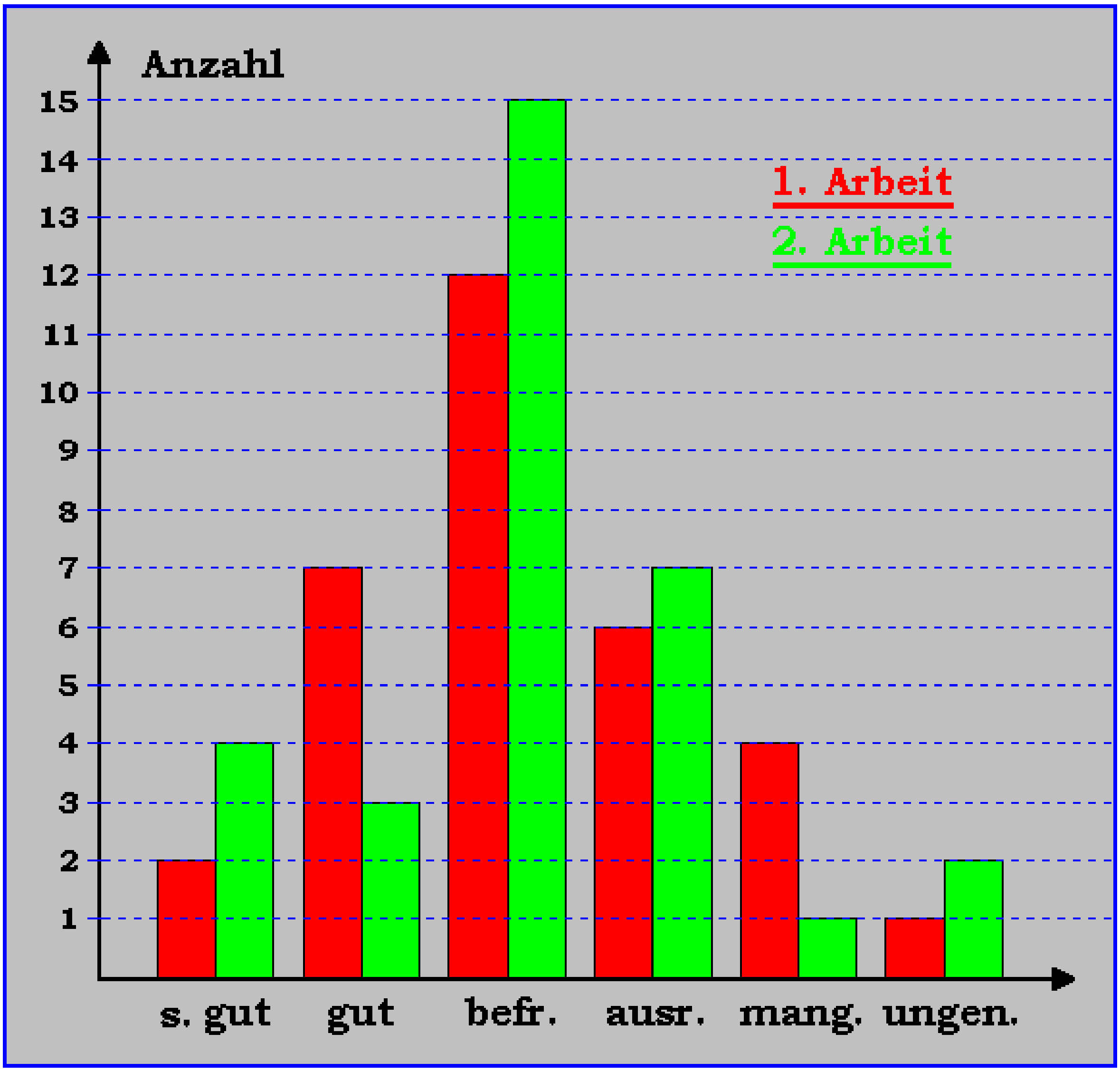
Da $m_{BS_1} = -\dfrac{1}{m_{BS_2}}$ gilt, ist das Dreieck <u>rechtwinklig</u>

Für den Flächeninhalt A des Dreiecks gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt <u>A = 25 FE</u>

Aufgabe 2a)



Aufgabe 2b)

Arbeit 1.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H(x_i)\, x_i = \frac{1}{32} (2 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 6) = \frac{102}{32} = 3{,}1875$$

Die Durchschnittsnote für die erste Arbeit beträgt $\underline{\underline{\bar{x} = 3{,}1875}}$

Arbeit 2

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H(x_i)\, x_i = \frac{1}{32} (4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6) = \frac{100}{32} = 3{,}125$$

Die Durchschnittsnote für die zweite Arbeit beträgt $\underline{\underline{\bar{x} = 3{,}125}}$

Aufgabe 3

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5} (160 + 163 + 172 + 175 + 180) = \frac{850}{5} = 170$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = (58 + 56 + 64 + 68 + 79) = \frac{325}{5} = 65$$

$$\overline{S_{x,y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_i})\,(y_i - \overline{y_i}) =$$

$$\frac{1}{5} [(160 - 170)\,(58 - 65) + (163 - 170)\,(56 - 65)\,(172 - 170)\,(64 - 65)$$

$$+ (175 - 170)\,(68 - 65) + (180 - 170)\,(79 - 65)] \qquad =$$

$$\frac{1}{5} [(-10) \cdot (-7) + (-7) \cdot (-9) + 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 14] =$$

$$\frac{1}{5} [70 + 63 - 2 + 15 + 140] = \frac{1}{5} \cdot 286 = 57{,}2$$

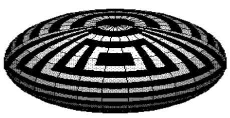
$$\overline{S_x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 =$$

$$\frac{1}{5} [(160 - 170)^2 + (163 - 170)^2 + (172 - 170)^2 + (175 - 170)^2 + (180 - 170)^2] =$$

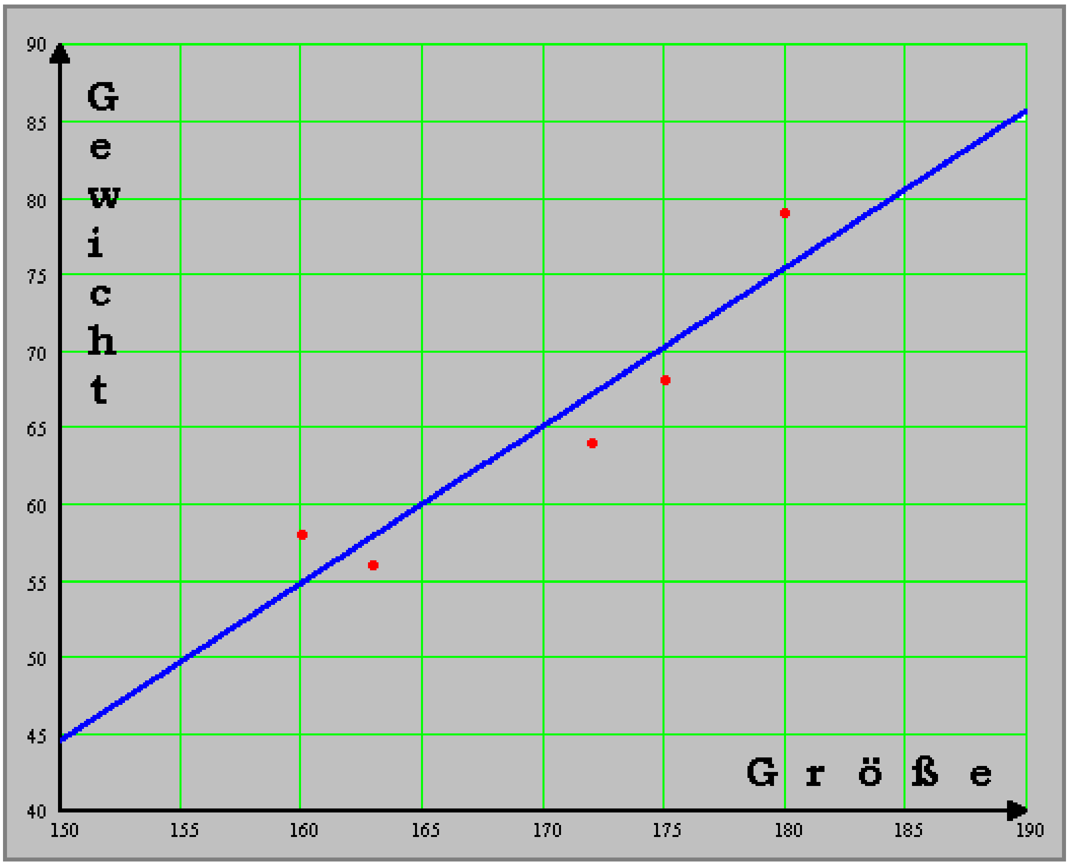
$$\frac{1}{5} [10^2 + 7^2 + 2^2 + + 5^2 + 10^2] = \frac{1}{5} [100 + 49 + 4 + 25 + 100] = \frac{1}{5} \cdot 278 = 55{,}6$$

$$y = \frac{\overline{S_{x,y}}}{\overline{S_x^2}} \cdot x + \left(\overline{y} - \frac{\overline{S_{x,y}}}{\overline{S_x^2}} \cdot x \right) = 1{,}028777\,x - 109{,}89209 \approx 1{,}029\,x - 109{,}829$$

Die Regressionsgerade hat die Gleichung: $\underline{\underline{y = 1{,}029\,x - 109{,}892}}$



zu Aufgabe 3



Aufgabe 4a)

Berechnung der Tangentensteigung

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{mit} \quad x = 1 \qquad \text{folgt}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \qquad \text{mit} \quad f(x) = x^3 \qquad \text{folgt}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + 1 - 1}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0} (h^2 + 3h + 3) = 3$$

Bestimmung der Tangentengleichung

$mx + b = t(x)$ Durch Einsetzen der Koordinaten von $P = (1 / 1)$ folgt

$$3 \cdot 1 + b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = -2$$

Die Tangentengleichung lautet: $\underline{\underline{t(x) = 3x - 2}}$

Aufgabe 4b)

Berechnung der Tangentensteigung

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{mit} \quad x = 4 \qquad \text{folgt}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \qquad \text{mit } f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{folgt}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}$$

Bestimmung der Tangentengleichung

$m\,x + b = t(x)$ Durch Einsetzen der Koordinaten von $P = (4 / 2)$ folgt

$$\frac{1}{4} \cdot 4 + b = 2 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1$$

Die Tangentengleichung lautet: $\underline{\underline{t(x) = \frac{1}{4}\,x + 1}}$