Ü b u n g s a r b e i t

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0, indem Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten berechnen.

a) $f(x) = -3x^4 + 5x \qquad x_0 = 2$ **b)** $f(x) = -5x^2 + 2\sqrt{x} \qquad x_0 = 36$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x - 4} \qquad x_0 = 1$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion (ohne Benutzung der Ableitungsregeln) zu

a) $f(x) = \dfrac{4}{x} - 6\sqrt{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{5x + 2}{x^2}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion zu den folgenden Funktionen mit Hilfe der Ableitungsregeln.

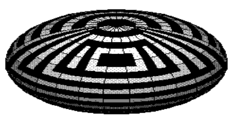
a) $f(x) = -5x^3 + 18x^2 - 9x + 27$ **b)** $f(x) = 7x^4 - 2\frac{1}{2}\sqrt{x}$

c) $f(x) = ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i$

d) $f(x) = (2x + 4)(2x - 4)x^2$ **e)** $f(x) = \sqrt[k]{x^w}$

f) $f(x) = \dfrac{5}{2\sqrt[3]{x^2}}$ **g)** $f(x) = (5x - 4)^2(2x + 7)$

h) $f(x) = x^3 + x^2 + x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$



Aufgabe 4

Eine Parabel $f(x) = a x^2 + b x + c$ schneidet die y-Achse an der Stelle $y_S = -48$.
Der Funktionsgraph verläuft außerdem durch die Punkte $P_1 = (2 / -32)$ und $P_2 = (-1 / -50)$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.

d) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Sekanten, die den Graphen von f in den Punkten $A = (7 / f(7))$ und $B = (-8 / f(-8))$ schneidet.

e) Zwischen den Punkten A und B liegt ein Punkt K auf dem Funktionsgraphen, in dem die Funktion $f(x)$ die gleiche Steigung hat, wie die in Teilaufgabe d) berechnete Sekante.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes K und die Gleichung der Tangente, die den Graphen von f im Punkt K berührt.

Aufgabe 5

Eine ganze rationale Funktion 3. Grades hat die Extrempunkte $E_1 = (-4 / f(-4))$ und $E_2 = (6 / f(6))$.
Die Funktion hat die Nullstelle $x_0 = 2$. Der Funktionsgraph verläuft durch den Punkt $P = (7 /320)$

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen.

c) Bestimmen Sie für die Punkte E_1 und E_2 die Art des Extremums und geben Sie die vollständigen Koordinaten dieser Punkte an.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W der Funktion f.

e) Fertigen Sie für die Funktion $f(x)$ und für die erste Ableitung $f'(x)$ eine Wertetabelle $(-9 \leq x \leq 11)$ an.
Wählen Sie für jede Koordinatenachse einen geeigneten Maßstab und zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in ein Koordinatensystem ein.
Beschreiben Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnung die Zusammenhänge, die zwischen diesen drei Funktionen bestehen.

Lösungen

Aufgabe 1a)

$$f(x) = -3x^4 + 5x \qquad x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{-3(2+h)^4 + 5(2+h) - (-3 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{-3(h^2 + 4h + 4)^2 + 10 + 5h + 48 - 10}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{-3(h^4 + 8h^3 + 24h^2 + 32h + 16) + 48 + 5h}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{-3h^4 - 24h^3 - 96h^2 - 60h - 48 + 48 + 5h}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{-3h^4 - 24h^3 - 72h^2 - 91h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-3h^3 - 24h^2 - 72h - 91)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} (-3h^3 - 24h^2 - 72h - 91) = -91$$

Die Funktion $f(x) = -3x^4 + 5x$ hat an der Stelle $x_0 = 2$ die Ableitung $\underline{\underline{f'(2) = -91}}$

Aufgabe 1b)

$$f(x) = -5x^2 + 2\sqrt{x} \qquad x_0 = 36$$

$$f'(36) = \lim_{h \to 0} \frac{f(36+h) - f(36)}{h}$$

$$f'(36) = \lim_{h \to 0} \frac{-5(36+h)^2 + 2\sqrt{36+h} - (-5 \cdot 36^2 + 2\sqrt{36})}{h}$$

$$f'(36) = \lim_{h \to 0} \frac{-5(h^2 + 72h + 1296) + 2\sqrt{36+h} + 6480 - 12}{h}$$

$$f'(36) = \lim_{h \to 0} \frac{-5h^2 - 360h - 6480 + 2\sqrt{36+h} + 6468}{h}$$

$$f'(36) = \lim_{h \to 0} \frac{-5\,h^2 - 360\,h - 12 + 2\sqrt{36 + h}}{h}$$

$$f'(36) = \lim_{h \to 0} \frac{(-5\,h^2 - 360\,h - 12 + 2\sqrt{36 + h})\,(-5\,h^2 - 360\,h - 12 - 2\sqrt{36 + h}}{h\,(-5\,h^2 - 360\,h - 12 - 2\sqrt{36 + h})}$$

$$f'(36) = \lim_{h \to 0} \frac{25\,h^4 + 3600\,h^3 + 12720\,h^2 + 8640\,h + 144 - 4\,(36 + h)}{h\,(-5\,h^2 - 360\,h - 12 - 2\sqrt{36 + h})}$$

$$f'(36) = \lim_{h \to 0} \frac{h\,(25\,h^3 + 3600\,h^2 + 12720\,h + 8636)}{h\,(-5\,h^2 - 360\,h - 12 - 2\sqrt{36 + h})}$$

$$f'(36) = \lim_{h \to 0} \frac{25\,h^3 + 3600\,h^2 + 12720\,h + 8636}{-5\,h^2 - 360\,h - 12 - 2\sqrt{36 + h}}$$

$$f'(36) = \frac{8636}{-12 - 12} = -\frac{8636}{24} = -359\frac{20}{24} = -359\frac{5}{6}$$

Die Funktion $f(x) = 5\,x^2 + 2\sqrt{x}$ hat an der Stelle $x_0 = 36$ die Ableitung

$$f'(36) = -359\frac{5}{6}$$

Aufgabe 1c)

$$f(x) = \frac{3\,x^2}{2\,x - 4} \qquad x_0 = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{3\,(h + 1)^2}{2\,(h + 1) - 4} - \frac{3}{-2}\right]$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{3\,(h^2 + 2\,h + 1)}{2\,h + 2 - 4} + \frac{3}{2}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{3\,h^2 + 6\,h + 3}{2\,h - 2} + \frac{3}{2}\right]$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2\,(3\,h^2 + 6\,h + 3) + 3\,(2\,h - 2)}{2\,(2\,h - 2)}\right]$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{6\,h^2 + 12\,h + 6 + 6\,h - 6}{4\,h - 4}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{6\,h^2 + 18\,h}{4\,h - 4}\right]$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}\left[\frac{6\,h + 18}{4\,h - 4}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{6\,h + 18}{4\,h - 4} = \frac{18}{-4} = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$$

Die Funktion $f(x) = \dfrac{3\,x^2}{2\,x - 4}$ hat an der Stelle $x_0 = 1$ die Ableitung

$$f'(1) = -4\frac{1}{2}$$

Aufgabe 2 a)

$$f(x) = \frac{4}{x} - 6\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4}{x+h} - 6\sqrt{x+h} - \left(\frac{4}{x} - 6\sqrt{x}\right)\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x} + 6\sqrt{x} - 6\sqrt{x+h}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{6\sqrt{x} - 6\sqrt{x+h}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4x - 4(x+h)}{h(x+h)x} + \lim_{h \to 0} \frac{(6\sqrt{x} - 6\sqrt{x+h})(6\sqrt{x} + 6\sqrt{x+h})}{h(6\sqrt{x} + 6\sqrt{x+h})}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-4h}{h(x+h)x} + \lim_{h \to 0} \frac{36x - 36(x+h)}{h(6\sqrt{x} + 6\sqrt{x+h}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-4}{(x+h)x} + \lim_{h \to 0} \frac{-36}{6\sqrt{x} + 6\sqrt{x+h}} = \frac{-4}{x^2} - \frac{36}{12\sqrt{x}} = -\frac{4}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Die Funktion $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{x}$ hat die Ableitung $\underline{\underline{f'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x}}}}$

Aufgabe 2b)

$$f(x) = \frac{5x + 2}{x^2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{5(x+h) + 2}{(x+h)^2} - \frac{5x+2}{x^2}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{5x + h + 2}{(x+h)^2} - \frac{5x+2}{x^2}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{(5x + 5h + 2)x^2 - (5x+2)(x+h)^2}{(x+h)^2 x^2}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{5x^3 + 5hx^2 + 2x^2 - (5x+2)(x^2 + 2xh + h^2)}{(x+h)^2 x^2}\right]$$

Fortsetzung von Aufgabe 2b)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{5x^3 + 5hx^2 + 2x^2 - (5x^3 + 2x^2 + 10hx^2 + 4hx + 5h^2x + 2h^2}{(x+h)^2 x^2} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-5hx^2 - 4hx - 5h^2x + 2h^2}{(x+h)^2 x^2} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \left[\frac{-5x^2 - 4x - 5hx + 2h}{(x+h)^2 x^2} \right] = \lim_{h \to 0} \frac{-5x^2 - 4x - 5hx + 2h}{(x+h)^2 x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5x^2 - 4x}{x^4} = -\frac{5x+4}{x^3}$$

Die Funktion $f(x) = \dfrac{5x+2}{x^2}$ hat die Ableitung $\underline{\underline{f'(x) = -\dfrac{5x+4}{x^3}}}$

Aufgabe 3

a) $f(x) = -5x^3 + 18x^2 - 9x + 27$

$\underline{\underline{f'(x) = -15x^2 + 36x - 9}}$

b) $f(x) = 7x^4 - 2\frac{1}{2}\sqrt{x} = 7x^4 - 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 28x^3 - 5x^{-\frac{1}{2}}$

$\underline{\underline{f'(x) = 28x^3 - \dfrac{5}{\sqrt{x}}}}$

c) $f(x) = ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i$

$\underline{\underline{f'(x) = 8ax^7 + 7bx^6 + 6cx^5 + 5dx^4 + 4ex^3 + 3fx^2 + 2gx + h}}$

d) $f(x) = (2x+4)(2x-4)x^2 = (4x^2 - 16)x^2 = 4x^4 - 16x^2$

$\underline{\underline{f'(x) = 16x^3 - 32x}}$

e) $f(x) = \sqrt[k]{x^w} = x^{\frac{w}{k}}$

$$f^{\mu}(x) = \frac{w}{k}\, x^{\frac{w}{k} - 1} = \frac{w}{k}\, x^{\frac{w-k}{k}}$$

$$\underline{\underline{f^{\mu}(x) = \frac{w}{k} \sqrt[k]{x^{w-k}}}}$$

f) $f(x) = \dfrac{5}{2\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{5}{2}\, x^{-\frac{2}{3}}$

$$f^{\mu}(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{2}{3} - 1} = -\frac{5}{3}\, x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{5}{3\, x^{\frac{5}{3}}}$$

$$\underline{\underline{f^{\mu}(x) = -\frac{5}{3\sqrt[3]{x^5}}}}$$

g) $f(x) = (5x - 4)^2 (2x + 7) = (25x^2 - 40x + 16)(2x + 7)$

$$f(x) = 50x^3 - 80x^2 + 32x + 175x^2 - 280x + 112$$

$$f(x) = 50x^3 + 95x^2 - 248x + 112$$

$$\underline{\underline{f^{\mu}(x) = 150x^2 + 190x - 248}}$$

h) $f(x) = x^3 + x^2 + x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$$

$$f^{\mu}(x) = 3x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\, x^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4}$$

$$\underline{\underline{f^{\mu}(x) = 3x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}}}$$

Aufgabe 4

a) $y_S = -48 \quad \Rightarrow \quad c = -48$ Für die Funktionsgleichung gilt also:

$f(x) = a\,x^2 + bx - 48$

Da der Graph durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft gilt:

$f(2) = -32$ und $f(-1) = -50$

Damit erhält man das Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rcll}
4a + 2b - 48 & = & -32 & / :2 \\
a - b - 48 & = & -50 & \\
\hline
2a + b & = & 8 & (+) \\
a - b & = & -2 & (*) \\
\hline
3a & = & 6 & \\
a & = & 2 & \text{in } (*) \\
2 - b & = & -2 & \\
-b & = & -4 & \\
b & = & 4 &
\end{array}
$$

Die Funktionsgleichung lautet $\underline{\underline{f(x) = 2x^2 + 4x - 48}}$

b)

$$
\begin{array}{rcl}
2x^2 + 4x - 48 & = & 0 \\
x^2 + 2x & = & 24 \\
x^2 + 2x + 1 & = & 25 \\
x + 1 & = & \pm 5 \\
x_1 & = & -6 \\
x_2 & = & 4
\end{array}
$$

Die Funktion f hat die Nullstellen $\underline{\underline{x_{01} = -6}}$ und $\underline{\underline{x_{02} = 4}}$

c) $f^{\mu}(x) = 4x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

$f(-1) = -50$

Der Scheitelpunkt von f hat die Koordinaten $\underline{\underline{S = (-1 / -50)}}$

Fortsetzung von Aufgabe 4

d) $m_S = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{f(-8) - f(7)}{-8 - 7} = \dfrac{48 - 78}{-15} = \dfrac{-30}{-15} = 2$

Für die Sekante gilt: $2x + b = s(x)$

Durch Einsetzen der Koordinaten von $A = (7 / 78)$ erhält man:

$2 \cdot 7 + b = 78 \quad \Leftrightarrow \quad b = 78 - 14 \quad \Leftrightarrow \quad b = 64$

Die Gleichung für die Sekante lautet $\underline{\underline{s(x) = 2x + 64}}$

e) $f'(x) = 4x + 4$

$4x + 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 4 \cdot (-\frac{1}{2}) - 48 = \frac{1}{2} - 2 - 48 = -49\frac{1}{2}$

Der Punkt K hat die Koordinaten $\underline{\underline{K = (-\frac{1}{2} \;/\; -49\frac{1}{2})}}$

Für die Tangentengleichung gilt: $2x + b = t(x)$

Durch Einsetzen der Koordinaten von K erhält man:

$2 \cdot (-\frac{1}{2}) + b = -49\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = -49\frac{1}{2} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = -48\frac{1}{2}$

Die Tangente hat die Gleichung $\underline{\underline{t(x) = 2x - 48\frac{1}{2}}}$

Aufgabe 5a)

a) Eine ganze rationale Funktion dritten Grades und ihre erste Ableitung lassen sich folgendermaßen darstellen:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

<u>B e d i n g u n g e n</u>

1) $E_1 = (-4 / f(-4)) \quad \Rightarrow \quad f'(-4) = 0$
2) $E_2 = (6 / f(6)) \quad \Rightarrow \quad f'(6) = 0$
3) Nullstelle $x_{02} = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 0$
4) $P = (7 / 320) \quad \Rightarrow \quad f(7) = 320$

Mit diesen 4 Bedingungen erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
48\,a & - & 8\,b & + & c & & & = & 0 & \\
108\,a & + & 12\,b & + & c & & & = & 0 & \\
8\,a & + & 4\,b & + & 2\,c & + & d & = & 0 & (***) \\
343\,a & + & 49\,b & - & 7\,c & + & d & = & 320 & \overline{\underline{\text{IV}}} - \overline{\underline{\text{III}}} \\
\hline
48\,a & - & 8\,b & + & c & & & = & 0 & \overline{\underline{\text{II}}} - \overline{\underline{\text{I}}} \quad (**) \\
108\,a & + & 12\,b & + & c & & & = & 0 & \overline{\underline{\text{II}}} - 0{,}2 \cdot \overline{\underline{\text{III}}} \\
335\,a & + & 45\,b & + & 5\,c & & & = & 320 & \\
\hline
60\,a & + & 20\,b & & & & & = & 0 & \mid \cdot\, 3/20 \\
41\,a & + & 3\,b & & & & & = & -64 & \\
\hline
9a & + & 3\,b & & & & & = & 0 & \overline{\underline{\text{I}}} - \overline{\underline{\text{II}}} \quad (*) \\
41\,a & + & 3\,b & & & & & = & -64 & \\
\hline
-32\,a & & & & & & & = & 64 & \\
a & & & & & & & = & -2 & \text{in } (*)
\end{array}
$$

$9 \cdot (-2) + 3\,b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,b = 18 \quad \Leftrightarrow \quad b = 6 \qquad$ in $(**)$

$48 \cdot (-2) - 8 \cdot 6 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 96 + 48 \quad \Leftrightarrow \quad c = 144 \qquad$ in $(***)$

$8 \cdot (-2) + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 144 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 16 - 24 - 288 \quad \Leftrightarrow \quad d = -296$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:

$$\underline{\underline{f(x) = -2\,x^3 + 6\,x^2 + 144\,x - 296}}$$

Aufgabe 5b

Aus $d = -296$ folgt: $f(0) = -296$

Der Graph von f schneidet die y-Achse an der Stelle $\underline{\underline{y_S = -296}}$

Schnittstellen mit der x-Achse

$x_{02} = 2$ s. Aufgabenstellung

$$
\begin{array}{l}
(-2\,x^3 + 6\,x^2 + 144\,x - 296) : (x - 2) = -2\,x^2 + 2\,x + 144 \\
\underline{-2\,x^3 + 4\,x^2} \\
\qquad\qquad 2\,x^2 + 144\,x \\
\qquad\qquad \underline{2\,x^2 - \quad 4\,x} \\
\qquad\qquad\qquad 148\,x - 296 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{148\,x - 296} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$-2x^2 + 2x + 148 = 0$$
$$x^2 - x = 74$$
$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 74\frac{1}{4}$$
$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{74\frac{1}{4}}$$
$$x_{01} = \frac{1}{2} + \sqrt{74\frac{1}{4}} \approx 9{,}117$$
$$x_{03} = \frac{1}{2} - \sqrt{74\frac{1}{4}} \approx -8{,}117$$

Der Graph von f schneidet die x-Achse an den Stellen
$\underline{\underline{x_{01} = -8{,}117,\ x_{02} = 2}}$ und $\underline{\underline{x_{03} = 9{,}117}}$.

Aufgabe 5c

$$f'(x) = -6x^2 + 12x + 144$$
$$f'(-4) = -96 - 48 + 144 = 0$$
$$f'(6) = -216 + 72 + 144 = 0$$

Die notwendige Bedingung $f'(x_E) = 0$ für Extremstellen ist in beiden Fällen erfüllt.

Hinreichende Bedingung: $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$

$f''(x) = -12x + 12$

$f''(-4) = -48 + 12 = 36 > 0 \quad \Rightarrow$ Minimum

$f''(6) = -72 + 12 = -60 < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum

$f(-4) = -2 \cdot (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 + 144 \cdot (-4) - 296 = 128 + 96 - 576 - 296$

$f(-4) = -648$

$f(6) = -2 \cdot 6^3 + 6 \cdot 6^2 + 144 \cdot 6 - 296 = -216 + 864 - 296 = 352$

Die Funktion hat im Punkt $\underline{\underline{E_1 = (-4\ /\ -648)}}$ ein lokales Minimum.

Das lokale Maximum der Funktion hat die Koordinaten $\underline{\underline{E_2 = (6\ /\ 352)}}$

Aufgabe 5d

Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x_w) = 0$

$-12\,x_w + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -12\,x_w = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x_w = 1$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte

$f'(x_w) \neq 0, \quad f''(x_w) = 0, \quad f'''(x_w) \neq 0$

$f'(1) = -6 + 12 + 144 = 150 \neq 0$

$f'''(x) = -12$ also gilt auch $f'''(1) = -12 \neq 0$

Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt ist also erfüllt.

$f(1) = -2 + 6 + 144 - 296 = -148$

Die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion f lauten: $\underline{\underline{W = (1 \,/\, -148)}}$

Aufgabe 5e)

Wertetabelle für die Funktion: $f(x) = -2\,x^3 + 6\,x^2 + 144\,x - 296$

x	−9	−8	-7	−6	−5	−4	−3
f (x)	−352	−40	−324	−512	−616	−648	−620

x	−2	−1	0	1	2	3	4
f (x)	−544	−432	−296	−148	0	136	248

x	5	6	7	8	9	10	11
f (x)	324	352	320	216	28	−256	−648

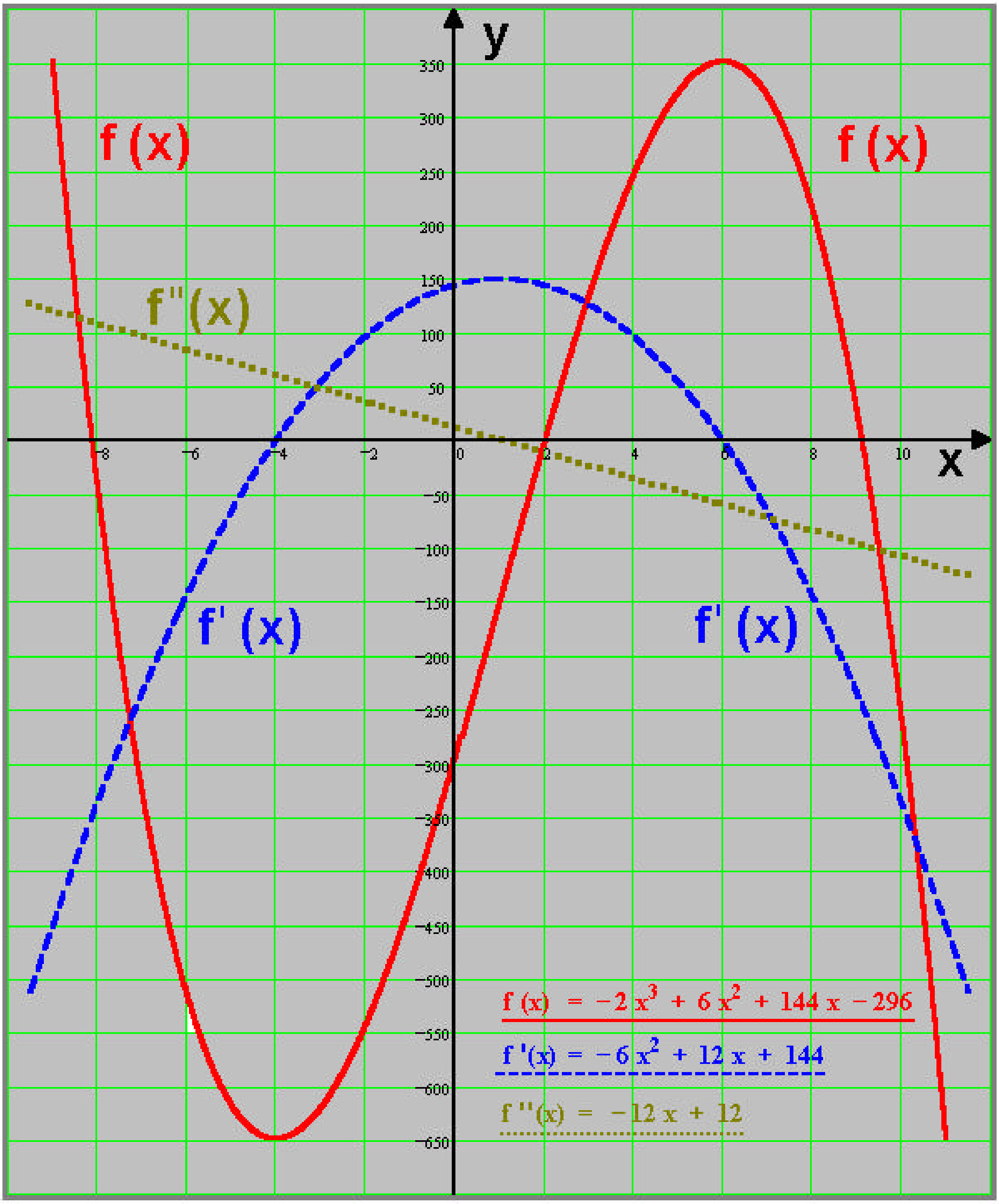
Wertetabelle für die 1. Ableitung: $f'(x) = -6\,x^2 + 12\,x + 144$

x	−9	−8	-7	−6	−5	−4	−3
f '(x)	−450	−336	−234	−144	−66	0	54

x	−2	−1	0	1	2	3	4
f '(x)	96	126	144	150	144	126	96

x	5	6	7	8	9	10	11
f '(x)	54	0	−66	−144	−234	−336	−450

Aufgabe 5e)



y
x
f (x)
f (x)
f''(x)
f' (x)
f' (x)
350
300
250
200
150
100
50
−50
−100
−150
−200
−250
−300
−350
−400
−450
−500
−550
−600
−650
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 144x - 296$
$f'(x) = -6x^2 + 12x + 144$
$f''(x) = -12x + 12$

Fortsetzung von Aufgabe 5e)

Dort, wo der Graph der ersten Ableitung unterhalb der x-Achse verläuft, also im Bereich $-\infty < x < -4$, ist die Steigung der Funktion f (x) negativ.

An der Stelle $x = -4$ schneidet der Graph fµ(x) die x-Achse. Der Graph von f¶(x) verläuft hier oberhalb der x-Achse; d. h. f¶$(-4) > 0$.
Die Funktion f hat an der Stelle $x = -4$ ein lokales Minimum.

Für $-4 < x < 6$ verläuft der Graph von fµ(x) oberhalb der x-Achse.
Die Steigung von f ist in diesem Bereich positiv.
An der Stelle $x = 6$ schneidet der Graph der ersten Ableitung die x-Achse.

Die Funktion f¶(x) verläuft an dieser Stelle unterhalb der x-Achse;

d. h. f¶$(6) < 0$. Die Funktion f (x) hat hier ein lokales Maximum.

Im Bereich $6 < x < \infty$ verläuft der Graph von fµ(x) unterhalb der x-Achse.
Die Steigung der Funktion f (x) ist in diesem Bereich negativ.

Der Graph der zweiten Ableitung f¶(x) verläuft für $-\infty < x < 1$ oberhalb der x-Achse. Der Graph von f ist in diesem Bereich linksgekrümmt.

Für $1 < x < \infty$ nimmt f¶(x) negative Werte an. der Graph von f weist hier eine Rechtskrümmung auf.

An der Stelle $x = 1$ schneidet der Graph von f¶(x) die x-Achse. Die Krümmung von f (x) wechselt hier ihre Richtung.
An der Stelle $x = 1$ hat die Funktion f (x) einen Wendepunkt.