Mathematikklausur Nr. 2 2. Hj Gk M 11

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0, indem Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten berechnen.

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2, \quad x_0 = 3$ **b)** $f(x) = x + \sqrt{x}, \quad x_0 = 49$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion (ohne Benutzung der Ableitungsregeln) zu

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen zu

a) $f(x) = 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 27x - 14$

b) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

c) $f(x) = -2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 4x^{\frac{1}{2}}$

d) $f(x) = \frac{6}{x^3} + \frac{7}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 4

Eine ganze rationale Funktion 3. Grades schneidet die y-Achse an der Stelle 5 und verläuft durch die Punkte
$P_1 = (-1 / 4\frac{1}{2})$, $P_2 = (1 / 3)$ und $P_3 = (4 / -3)$

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes H und des Tiefpunktes T.
(Genauigkeit: 3 Stellen nach dem Komma)

Fortsetzung von Aufgabe 4

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W.

e) Eine Gerade h schneidet die y-Achse an der Stelle 2 und verläuft durch den Punkt $P_2 = (1 / 3)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B_1 und B_2, in denen der Graph von f dieselbe Steigung wie die Gerade h hat.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2, die den Graphen von f in den Punkten B_1 und B_2 berühren.

f) Schreiben Sie die folgende Tabelle ab, und berechnen Sie die zugehörigen Funktionswerte f (x).
(Genauigkeit: 3 Stellen nach dem Komma)

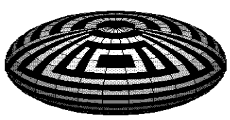
x	−2,5	−2	−1,5	−1,	−0,5	0
f(x)						

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)						

x	3,5	4	4,5	5	5,5
f(x)					

Zeichnen Sie den Graphen von f,die Gerade h und die beiden Tangenten t_1 und t_2 in ein Koordinatensystem ein

Hinweis: Wenn Sie die Funktionsgleichung aus Teil a) nicht bestimmen können, so sind die übrigen Aufgabenteile mit Hilfe der Funktion $f(x) = \frac{1}{4} x^3 - 1\frac{1}{4} x^2 - x + 5$ zu bearbeiten.



L ö s u n g e n

Aufgabe 1

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 \qquad x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(3+h)^3 + 4(3+h)^2 - 90}{h}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{2(9 + 6h + h^2)(3+h) + 4(9 + 6h + h^2) - 90}{h}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{2(27 + 18h + 3h^2 + 9h + 6h^2 + h^3) + 36 + 24h + 4h^2 - 90}{h}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{2h^3 + 18h^2 + 54h + 54 + 36 + 24h + 4h^2 - 90}{h}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{2h^3 + 22h^2 + 78h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2h^2 + 22h + 78)}{h}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} (2h^2 + 22h + 78) = 78$$

Die Funktion $f(x) = 2x^3 + 4x^2$ hat an der Stelle $x_0 = 3$ die Ableitung

$$\underline{\underline{f'(3) = 78}}$$

b) $f(x) = x + \sqrt{x} \qquad x_0 = 49$

$$f'(49) = \lim_{h \to 0} \frac{f(49+h) - f(49)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{49 + h + \sqrt{49+h} - (49 + \sqrt{49})}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{49 + h + \sqrt{49+h} - 56}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 7 + \sqrt{49+h}}{h}$$

$$f'(49) = \lim_{h \to 0} \frac{[(h-7) + \sqrt{49+h}\,] \cdot [(h-7) - \sqrt{49+h}\,]}{h}$$

$$f'(49) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 14h + 49 - h}{h^2 - 7h - h\sqrt{49+h}} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 15h}{h^2 - 7h - h\sqrt{49+h}}$$

$$f'(49) = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-15)}{h(h - 7 - \sqrt{49+h}\,)} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 15}{h - 7 - \sqrt{49+h})}$$

$$f'(49) = \frac{-15}{-7 - \sqrt{49}} = \frac{-15}{-14} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$$

Die Funktion $f(x) = x + \sqrt{x}$ hat an der Stelle $x_0 = 49$ die Ableitung

$$\underline{\underline{f'(49) = 1\frac{1}{14}}}$$

Aufgabe 2

a) $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2\,x\,h + h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2\,x\,h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\,(h + 2\,x)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2\,x) = 2\,x$$

Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ lautet $\underline{\underline{f'(x) = 2\,x}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x}{x^2 + h\,x} - \frac{x+h}{x^2 + h\,x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x^2 + h\,x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h\,(x^2 + h\,x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2 + h\,x} = -\frac{1}{x^2}$$

Die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ lautet $\underline{\underline{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}}}$

Aufgabe 3

a) $f(x) = 7\,x^4 - 8\,x^3 + 5\,x^2 + 27\,x - 14$

$$\underline{\underline{f'(x) = 28\,x^3 - 24\,x^2 + 10\,x + 27}}$$

b) $f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$

$$\underline{\underline{f'(x) = n\,a_n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + (n-2)\,a_{n-2}\,x^{n-3} + \cdots\cdots + 3\,a_3\,x^3 + 2\,a_2\,x + a_1}}$$

c) $f(x) = -2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 4\,x^{\frac{1}{2}} = -2\,x^{\frac{1}{2}} - 3\,x^{\frac{2}{3}} + 4\,x^{\frac{1}{2}} = 2\,x^{\frac{1}{2}} - 3\,x^{\frac{2}{3}}$

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{2}} - 2\,x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}}}$$

d) $f(x) = \dfrac{6}{x^3} + \dfrac{7}{x} - \dfrac{8}{\sqrt{x}} = 6\,x^{-3} + 7\,x^{-1} - 8\,x^{-\frac{1}{2}}$

$$\underline{\underline{f'(x) = -18\,x^{-4} - 7\,x^{-2} + 4\,x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{18}{x^4} - \frac{7}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x^3}}}}$$

Aufgabe 4

a) Eine ganze rationale Funktion 3. Grades hat die Form:

$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Da der Graph die y-Achse an der Stelle 5 schneidet, gilt:

$f(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad d = 5$

Damit erhält man für die Funktionsgleichung:

$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + 5 = f(x)$

Durch Einsetzen der Koordinaten der Punkte $P_1 = (-1 \,/\, 4\frac{1}{2})$, $P_2 = (1 \,/\, 3)$ und $P_3 = (4 \,/\, -3)$ erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
-a & + & b & - & c & + & 5 & = & 4\frac{1}{2} \\
a & + & b & + & c & + & 5 & = & 3 \\
64\,a & + & 16\,b & + & 4\,c & + & 5 & = & -3
\end{array} \qquad \text{Û}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-a & + & b & + & c & = & -\frac{1}{2} \\
a & + & b & + & c & = & -2 \\
64\,a & + & 16\,b & + & 4\,c & = & -8
\end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{\text{I}} + \overline{\text{II}} \\ \frac{1}{4} \cdot \overline{\text{III}} - \overline{\text{II}} \end{array}$$

$2\,b = -2\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}\,(\overline{\text{III}} - \overline{\text{II}}) \qquad \Leftrightarrow \qquad b = -\frac{1}{4} \qquad$ in

$\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} + c = -2 \quad \Leftrightarrow \quad c = -2 - \frac{1}{4} + 1\frac{1}{4}$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{4}\,x^3 - 1\frac{1}{4}\,x^2 - x + 5}}$

b) Die Nullstellen einer Funktion bleiben erhalten, wenn man ihre Funktionsgleichung mit einer reellen Zahl α multipliziert.

Sei $\alpha = 4$

$f_4(x) = 4\,f(x) = x^3 - 5\,x^2 - 4\,x + 20 \qquad x_{01} = 2$ durch Probe

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 5\,x^2 - 4\,x + 20) : (x - 2) = x^2 - 3\,x - 10 \\
\underline{x^3 - 2\,x^2} \\
\quad -3\,x^2 - 4\,x \\
\quad \underline{-3\,x^2 + 6\,x} \\
\qquad\quad -10\,x + 20 \\
\qquad\quad \underline{-10\,x + 20} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Fortsetzung von Aufgabe 4b)

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x - 10 &= 0 \\
x^2 - 3x &= 10 \\
x^2 - 3x + 2{,}25 &= 12{,}25 \\
x - 1{,}5 &= \pm\sqrt{12{,}25} \\
x - 1{,}5 &= \pm 3{,}5 \\
x_{02} &= 5 \\
x_{03} &= -2
\end{aligned}$$

Die Nullstellen der ganzen rationalen Funktion sind:

$$\underline{\underline{x_{01} = 2,\ x_{02} = 5}} \text{ und } \underline{\underline{x_{03} = -2}}$$

c) Die Funktion f(x) und ihre ersten drei Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}x^3 - 1\frac{1}{4}x^2 - x + 5 \\
f'(x) &= \frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x - 1 \\
f''(x) &= 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} \\
f'''(x) &= 1\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x_E) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}x_E^2 - 2\frac{1}{2}x_E - 1 &= 0 \\
\frac{3}{4}x_E^2 - 2\frac{1}{2}x_E &= 1 \\
x_E^2 - \frac{10}{3}x_E &= \frac{4}{3} \\
x_E^2 - \frac{10}{3}x_E + \frac{25}{9} &= \frac{4}{3} + \frac{25}{9} \\
\left(x_E - \frac{5}{3}\right)^2 &= \frac{37}{9}
\end{aligned}$$

Fortsetzung von Aufgabe 4c)

$$x_E - \frac{5}{3} \quad = \quad \pm\frac{1}{3}\sqrt{37}$$

$$x_{E1} \quad = \quad \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{37} \approx 3{,}694$$

$$x_{E2} \quad = \quad \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{37} \approx 0{,}361$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f''(x_{E1}) = 1\frac{1}{2}\,x_{E1} - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}\cdot 3{,}694 \quad - 2\frac{1}{2} \quad = \quad 3{,}041 \quad > 0 \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$f''(x_{E2}) = 1\frac{1}{2}\,x_{E2} - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}\cdot(-0{,}361) - 2\frac{1}{2} \approx -0{,}30415 < 0 \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$f(x_{E1}) = f(3{,}694) = \frac{1}{4}\cdot 3{,}694^3 - 1\frac{1}{4}\cdot 3{,}694^2 - 3{,}694 + 5 \approx 3{,}149$$

$$f(x_{E2}) = f(-0{,}361) = \frac{1}{4}\cdot(-0{,}361)^3 - 1\frac{1}{4}\cdot(-0{,}361)^2 + 0{,}361 + 5 \approx 5{,}186$$

Die ganze rationale Funktion hat das lokale Minimum $\underline{\underline{T = (3{,}694 \;/\; -3{,}149)}}$

Die ganze rationale Funktion hat das lokale Maximum $\underline{\underline{H = (-0{,}361 \;/\; 5{,}186)}}$

d) Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x) = 0$

$$1\frac{1}{2}\,x_W - 2\frac{1}{2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{2}\,x_W = \frac{5}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x_W = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen:

$$f'(x_W) \neq 0,\; f''(x_W) = 0,\; f'''(x_W) \neq 0$$

$$f'(x_W) = f'\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3} - 1 = \frac{75}{12} - \frac{50}{12} - \frac{12}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12} \neq 0$$

$$f'''(x_W) = f'''\left(\frac{5}{3}\right) = 1\frac{1}{2} \neq 0$$

Die hinreichende Bedingung für Wendestellen ist also erfüllt.

$$f(x_W) = f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^3 - \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{5}{3} + 5 = \frac{125}{108} - \frac{125}{12} - \frac{5}{3} + 5$$

$$= \frac{125}{108} - \frac{1125}{108} - \frac{180}{108} + \frac{540}{108} = -\frac{640}{108} = -\frac{160}{27} = -5\frac{25}{27}$$

Der Wendepunkt der Funktion f(x) hat die Koordinaten $\underline{\underline{W = \left(1\frac{2}{3} \;\middle|\; -5\frac{25}{27}\right)}}$

e) $P_0 = (0 / 2)$ $\quad P_2 = (1 / 3)$

$$m_h = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{3 - 2}{1 - 0} = 1$$

Die Gerade h hat die Steigung $\underline{\underline{m = 1}}$

$f^{\mu}(x) = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x - 1 &= 1 \\
\frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x &= 2 \\
x^2 - \frac{10}{3}x &= \frac{8}{3} \\
x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} &= \frac{24}{9} + \frac{25}{9} \\
\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 &= \pm\frac{49}{9} \\
x_1 &= 4 \\
x_2 &= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$f(4) = -3$ (s. Aufgabe)

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 1\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 5 = -\frac{2}{27} - \frac{15}{27} + \frac{18}{27} + \frac{135}{27}$$

$$= \frac{136}{27} = 5\frac{1}{27}$$

Die Punkte, in denen der Graph von f die Steigung m = 1 hat sind:

$\underline{\underline{B_1 = (4 / -3)}}$ und $\underline{\underline{B_2 = (-\frac{2}{3} / 5\frac{1}{27})}}$

Bestimmung der Tangentengleichungen von t_1 und t_2

$m x + b = t_1(x)$ mit $m = 1 \quad \Rightarrow \quad x + b = t_1(x)$

Durch Einsetzen der Koordinaten von $B_1 = (4 / -3)$ erhält man:

$4 + b = -3 \quad \Leftrightarrow \quad b = -7$

Die Tangente t_1 hat die Funktionsgleichung $\underline{\underline{t_1(x) = x - 7}}$

Fortsetzung von Aufgabe 4e)

$mx + b = t_2(x)$ mit $m = 1$ $\Rightarrow$ $x + b = t_2(x)$

Durch Einsetzen der Koordinaten von $B_2 = (-\frac{2}{3} \,/\, 5\frac{1}{27})$ erhält man:

$$-\frac{2}{3} + b = 5\frac{1}{27} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{18}{27} + \frac{136}{27} = \frac{154}{27} = 5\frac{19}{27}$$

Die Tangente t_2 hat die Funktionsgleichung $\underline{\underline{t_2(x) = x + 5\frac{19}{27}}}$

f)

x	− 2,5	− 2	− 1,5	− 1	− 0,5	0
f(x)	− 4,219	0	2,844	4,5	5,156	5

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	4,219	3	1,531	0	− 1,406	− 2,5

x	3,5	4	4,5	5	5,5
f(x)	− 3,094	− 3	− 2,031	0	3,281

Aufgabe 4f)