Nachschreibklausur

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0, indem Sie den Grenzwert des Differenzenquotienten berechnen.

a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 \qquad x_0 = 4$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad x_0 = 25$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion (ohne Benutzung der Ableitungs-regeln) zu:

a) $f(x) = x^2 + x$

b) $f(x) = \frac{4}{x}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion zu

a) $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 6$

b) $f(x) = a_n x^n - (4 + n)\, a_k x^{k-4} + a_z x^{z-1}$

c) $f(x) = \sqrt{x} + 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^2$

d) $f(x) = \frac{2}{x^4} + 6x^{-2} - \frac{12}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 4

Eine ganze rationale Funktion vierten Grades schneidet die x-Achse an den Stellen $x_{01} = -4$, $x_{02} = -2$, $x_{03} = 2$, $x_{04} = 4$ und die y-Achse an der Stelle $y_S = 8$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
(Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 2\frac{1}{2}x^2 + 8$)

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte dieser Funktion.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

d) Fertigen Sie eine Wertetabelle für die Funktion $f(x)$ und deren Ableitungsfunktionen $f^{\mu}(x)$ und $f^{\P}(x)$ an.

e) Wählen Sie einen geeigneten Maßstab und zeichnen Sie die Graphen dieser 3 Funktionen in ein Koordinatensystem.

f) Beschreiben Sie die Zusammenhänge, die zwischen der Funktion $f(x)$ und deren Ableitungen $f^{\mu}(x)$ und $f^{\P}(x)$ bestehen.

L ö s u n g e n

Aufgabe 1a

$f(x) = 4x^3 - 2x^2 \qquad x_0 = 4$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(4+h)^3 - (4 \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2)}{h}$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{4(16 + 8h + h^2)(4 + h) - 2(16 + 8h + h^2) - 224}{h}$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{4(64 + 48h + 12h^2 + h^3) - 32 - 16h - 2h^2 - 224}{h}$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{256 + 192h + 48h^2 + 4h^3 - 32 - 16h - 2h^2 - 224}{h}$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{4h^3 + 46h^2 + 176h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4h^2 + 46h + 176)}{h}$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} (4h^2 + 46h + 176) = 176$$

Die Funktion $f(x) = 4x^3 - 2x^2$ hat an der Stelle $x_0 = 4$ die Ableitung $\underline{\underline{f'(4) = 176}}$

Aufgabe 1b

$f(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad x_0 = 25$

$$f'(25) = \lim_{h \to 0} \frac{f(25+h) - f(25)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{25+h} + 2 - (\sqrt{25} + 2)}{h}$$

$$f'(25) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{25+h} + 2 - 5 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{25+h} - 5}{h}$$

$$f'(25) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{25+h} - 5)(\sqrt{25+h} + 5)}{h(\sqrt{25+h} + 5)} = \lim_{h \to 0} \frac{25 + h - 25}{h(\sqrt{25+h} + 5)}$$

$$f'(25) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{25+h} + 5} = \frac{1}{5+5} = \frac{1}{10}$$

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x} + 2$ hat an der Stelle $x_0 = 25$ die Ableitung $\underline{\underline{f'(25) = \frac{1}{10}}}$

Aufgabe 2a

$f(x) = x^2 + x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + x + h - (x^2 + x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^2 - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh + h}{h}$$

$$f'(x) = \frac{h(h + 2x + 1)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x + 1) = 2x + 1$$

Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + x$ lautet: $\underline{\underline{f'(x) = 2x + 1}}$

Aufgabe 2b

$f(x) = \frac{4}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4x - 4(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-4h}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0}\left[\frac{-4}{x(x+h)}\right] = -\frac{4}{x^2}$$

Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{4}{x}$ lautet: $\underline{\underline{f'(x) = -\frac{4}{x^2}}}$

Aufgabe 3

a) $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 6$

$\underline{\underline{f'(x) = 15x^4 - 21x^2 + 8x}}$

b) $f(x) = a_n x^n - (4 + n)\, a_k x^{k-4} + a_z x^{z-1}$

$\underline{\underline{f'(x) = n\, a_n x^{n-1} - (k - 4)(4 + n)\, a_k x^{k-5} + (z - 1)\, a_z x^{z-2}}}$

Fortsetzung von Aufgabe 3

c) $f(x) = \sqrt{x} + 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^2 = \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 4x^2 = 3\sqrt{x} - 4x^2 = 3x^{\frac{1}{2}} - 4x^2$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 8x$$

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 8x}}$$

d) $f(x) = \frac{2}{x^4} + 6x^{-2} - \frac{12}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = -8x^{-5} - 12x^{-3} + 6x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\underline{\underline{f'(x) = -\frac{8}{x^5} - \frac{12}{x^3} + \frac{6}{\sqrt{x}}}}$$

Aufgabe 4 a

Durch die 4 Nullstellen ist die ganze rationale Funktion 4-ten Grades bis auf den Streckungsfaktor $\alpha \in R \setminus \{0\}$ festgelegt. Es gilt also:

$$f(x) = \alpha(x-4)(x+4)(x-2)(x+2) = \alpha(x^2-16)(x^2-4) = \alpha(x^4 - 20x^2 + 64)$$

Da der Graph von f die y-Achse an der Stelle $y_S = 8$ schneidet, folgt:

$$f(0) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot 64 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{8}$$

Damit erhält man: $f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 20x^2 + 64) = \frac{1}{8}x^4 - 2\frac{1}{2}x + 8$

Die Gleichung der ganzen rationalen Funktion vierten Grades lautet:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 2\frac{1}{2}x^2 + 8}}$$

Aufgabe 4 b

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x_E) = 0$

$$f'(x_E) = \frac{1}{2}x_E^3 - 5x_E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E\left(\frac{1}{2}x_E^2 - 5\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E1} = 0$$

$$\frac{1}{2}x_E^2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x_E^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x_E^2 = 10$$

$\underline{x_{E2} = \sqrt{10} \approx 3{,}162}$ $\qquad$ $\underline{x_{E3} = -\sqrt{10} \approx -3{,}162}$

Fortsetzung von Aufgabe 4 b

Hinreichende Bedingung für Extremstellen: $f^{\mu}(x_E) = 0$ s.o. und $f^{\P}(x_E) \neq 0$

$$f^{\P}(x_E) = \frac{3}{2}\,x_E - 5$$

$$f^{\P}(x_{E1}) = f^{\P}(0) = -5 < 0 \;\Rightarrow\; \text{Maximum}$$

$$f^{\P}(x_{E2}) = f^{\P}(\sqrt{10}) = \frac{3}{2}\cdot 10 - 5 = 10 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Minimum}$$

$$f^{\P}(x_{E2}) = f^{\P}(-\sqrt{10}) = \frac{3}{2}\cdot 10 - 5 = 10 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Minimum}$$

Berechnung der Funktionswerte

$$f(x_{E1}) = f(0) = 8$$

$$f(x_{E2}) = f(\sqrt{10}) = \frac{1}{8}\cdot(\sqrt{10})^4 - 2\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{10})^2 + 8 = \frac{1}{8}\cdot 100 - 2\frac{1}{2}\cdot 10 + 8 = -4\frac{1}{2}$$

$$f(x_{E2}) = f(-\sqrt{10}) = \frac{1}{8}\cdot(-\sqrt{10})^4 - 2\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{10})^2 + 8$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 100 - 2\frac{1}{2}\cdot 10 + 8 = -4\frac{1}{2}$$

Die Funktion f hat das Maximum $\underline{\underline{H = (0 / 8)}}$ und die beiden Minima

$\underline{\underline{T_1 = (-\sqrt{10} \;/\; -4\frac{1}{2})}}$ und $\underline{\underline{T_2 = (\sqrt{10} \;/\; -4\frac{1}{2})}}$

Aufgabe 4 c

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f^{\P}(x_W) = 0$

$$\frac{3}{2}\,x_W^2 - 5 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_W^2 = \frac{10}{3}$$

$$x_{W1} = \sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1{,}826 \qquad x_{W2} = -\sqrt{\frac{10}{3}} \approx -1{,}826$$

Hinreichende Bedingung für Wendestellen: $f^{\mu}(x_W) \neq 0$, $f^{\P}(x_W) = 0$ s.o. und $f^{\mu\mu\mu}(x_E) \neq 0$

$$f^{\mu}(x_{W1}) = f^{\mu}\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3 - 5\cdot\sqrt{\frac{10}{3}} \approx -6{,}086 \neq 0$$

$$f^{\mu}(x_{W2}) = f^{\mu}\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3 - 5\cdot\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3 - 5\cdot\sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$f^{\mu}(x_{W2}) \approx 6{,}086 \neq 0$$

Die dritte Ableitung der Funktion f lautet: $f^{\mu\mu\mu}(x) = 2\,x$

Für die Wendestellen erhält man:

$$f^{\mu\mu\mu}(x_{W1}) = f^{\mu\mu\mu}\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 2\cdot\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 3{,}651 \neq 0$$

$$f^{\mu\mu\mu}(x_{W2}) = f^{\mu\mu\mu} = -2\cdot\sqrt{\frac{10}{3}} \approx -3{,}651 \neq 0$$

Die hinreichende Bedingung für Wendestellen ist also erfüllt.

Berechnung der Funktionswerte

$$f(x_{w1}) = f\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^4 - 2\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 + 8 = \frac{1}{8}\cdot\frac{100}{9} - 2\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3} + 8$$

$$f(x_{W1}) = \frac{25}{18} - \frac{50}{6} + \frac{144}{18} = \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18} \approx 1{,}056$$

$$f(x_{W2}) = \frac{1}{8}\cdot\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^4 - 2\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 + 8 = 1\frac{1}{18} \approx 1{,}056$$

Die beiden Wendepunkte der Funktion f haben die Koordinaten:

$$W_1 = \left(\sqrt{\frac{10}{3}}\;\middle|\;1\frac{1}{18}\right) \approx \left(1{,}826\ /\ 1{,}056\right), \qquad W_2 = \left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\;\middle|\;1\frac{1}{18}\right) \approx \left(-1{,}826\ /\ 1{,}056\right)$$

Aufgabe 4 d

x	± 4,5	± 4	± 3,5	± 3	± 2,5
f (x)	8,633	0	−3,867	−4,375	−2,742

x	± 2	± 1,5	± 1	± 0,5	0
f(x)	0	3,008	5,625	7,383	8

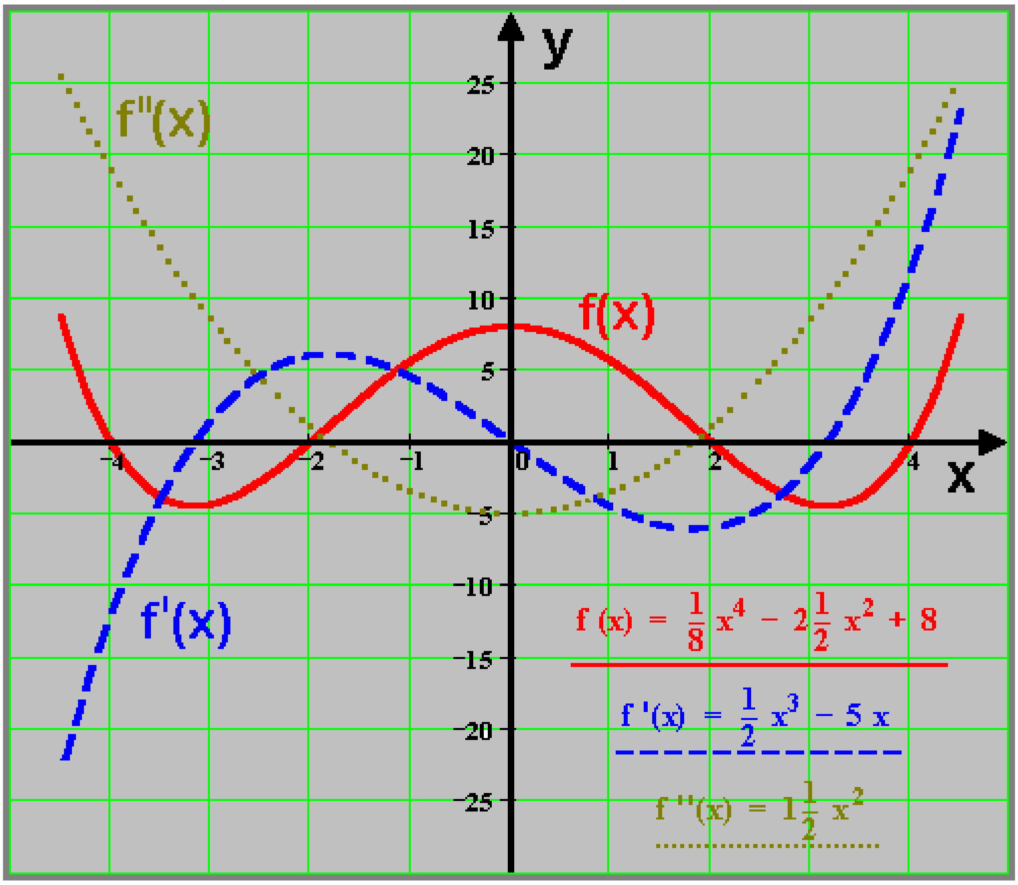
Fortsetzung von Aufgabe 4 d

x	– 4,5	– 4	– 3,5	– 3	– 2,5	– 2	– 1,5
$f'(x)$	– 23,063	– 12	– 3,938	1,5	4,688	6	5,813
$f''(x)$	30,375	24	18,375	13,5	9,375	6	3,375

x	– 1	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f'(x)$	4,5	2,438	0	– 2,438	– 4,5	– 5,183	– 6
$f''(x)$	1,5	0,375	0	0,375	1,5	3,375	6

x	2,5	3	3,5	4	4,5
$f'(x)$	– 4,688	– 1,5	3,938	12	23,063
$f''(x)$	9,375	13,5	18,375	24	30,375

Aufgabe 4 e



<u>Aufgabe 4 e</u>

Für $-\infty < x < -\sqrt{10}$ ist die Funktion f (x) monoton fallend. Die erste Ableitung verläuft in diesem Bereich unterhalb der x-Achse. An der Stelle $x = -\sqrt{10}$ ändert die Steigung der Funktion f (x) ihr Vorzeichen; sie wird also positiv. Der Graph der ersten Ableitungsfunktion schneidet an dieser Stelle die x-Achse. Im Punkt $T_1 = (-\sqrt{10} / -4\frac{1}{2})$ hat die Funktion f (x) ein lokales Minimum. Die Steigung von f (x) bleibt nun bis zum Schnittpunkt mit der y-Achse H = (0 / 8), wo ein lokales Maximum vorliegt,positiv, ändert dort ihr Vorzeichen und bleibt bis zur Stelle $x = \sqrt{10}$ negativ, wo sie erneut ihr Vorzeichen wechselt.Im Punkt $T_2 = (\sqrt{10} / -4\frac{1}{2})$ hat f (x) ein weiteres Minimum.

Bei $x = \sqrt{10}$ schneidet der Graph der ersten Ableitung die x-Achse.
Für $\sqrt{10} < x < \ldots$ sind die Funktionswerte von $f^{\mu}(x)$ positiv.
Die Steigung der Funktion f (x) ändert an der Stelle $x = \sqrt{10}$, wo ein weiteres lokales Minimum vorliegt, erneut ihr Vorzeichen und bleibt dann im Bereich $\sqrt{10} < x < \ldots$ positiv.

Die zweite Ableitungsfunktion $f^{\P}(x)$ verläuft im Bereich $-\ldots < x < -\sqrt{\frac{10}{3}}$ oberhalb der x-Achse. Der Graph der Funktion f (x) ist in diesem Bereich linksgekrümmt.
Für $-\sqrt{\frac{10}{3}} < x < \sqrt{\frac{10}{3}}$ nimmt $f^{\P}(x)$ negative Funktionswerte an.
Der Graph von f (x) ist in diesem Bereich rechtsgekrümmt.
Für $\sqrt{\frac{10}{3}} < x < \ldots$ sind die Funktionswerte von $f^{\P}(x)$ wieder positiv.
Der Graph von f (x) weist in diesem Bereich erneut eine Linkskrümmung auf.
An den Stellen $x = -\sqrt{\frac{10}{3}}$ und $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$ schneidet der Graph der zweiten Ableitung die x-Achse. Es findet an diesen Stellen jeweils ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von $f^{\P}(x)$ statt. Der Graph von f (x) wechselt an der Stelle $x = -\sqrt{\frac{10}{3}}$ von der Linkskrümmung in die Rechtskrümmung - und an der Stelle $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$ von der Rechtskrümmung in die Linkskrümmung.

Die Punkte $W_1 = \left(-\sqrt{\frac{10}{3}} \,\middle|\, 1\frac{1}{18}\right)$ und $W_2 = \left(\sqrt{\frac{10}{3}} \,\middle|\, 1\frac{1}{18}\right)$ sind also Wendepunkte der Funktion f (x).