Übungsarbeit

Führe eine ausführliche Funktionsuntersuchung (auch Kurven-diskussion genannt) für die folgenden Funktionen durch.

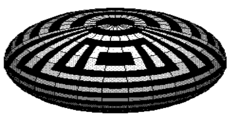
1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$

2) $f(x) = 6x^4 - 16x^3 + 12x^2$

3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$

4) $f(x) = \frac{1}{50}x^5 - x^3 + 12\frac{1}{2}x$

(Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrie, Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse, Extrempunkte, Monotonie, Wendepunkte, Verhalten für x ¡ ±..., Krümmung, Wertetabelle, Skizze des Graphen)
Die Reihenfolge, in der die o.g. Punkte behandelt werden, kann beliebig gewählt werden.



L ö s u n g e n

Aufgabe 1

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$

Definitionsbereich

Da f (x) eine ganze rationale Funktion ist, gilt: $\underline{\underline{D(f) = R}}$

Nullstellen

$f(x) = 0$

$\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ Setze $x^2 = z$

$\frac{1}{4}z^2 - 2z + 2 = 0$

$z^2 - 8z = -8$ quadratische Ergänzung

$z^2 - 8z + 16 = 8$

$(z-4)^2 = 8$

$z - 4 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$z_1 = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6{,}828$

$z_2 = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}172$

Mit $x^2 = z$ folgt $x = \pm\sqrt{z}$, also $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$

Die Nullstellen der Funktion sind:

$\underline{\underline{x_1 = 2{,}613,\ x_2 = -2{,}613,\ x_3 = 1{,}082}}$ und $\underline{\underline{x_4 = -1{,}082}}$

Schnittpunkt mit der y-Achse

Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $\underline{\underline{S_y = (0 / 2)}}$

Extrempunkte

Notwendige Bedingung: $f^{\mu}(x) = 0$

$f^{\mu}(x) = x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E1} = 0$

$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{E2} = 2, \quad x_{E3} = -2$

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x) = 0$ (s.o.) und $f^{\P}(x) \neq 0$

$f^{\P}(x) = 3x^2 - 4$

$f^{\P}(x_{E1}) = f^{\P}(0) = -4 \qquad < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum

$f^{\P}(x_{E2}) = f^{\P}(2) = 12 - 4 = 8 \qquad > 0 \quad \Rightarrow$ Minimum

$f^{\P}(x_{E3}) = f^{\P}(-2) = 12 - 4 = 8 \qquad > 0 \quad \Rightarrow$ Minimum

$f(x_{E1}) = f(0) = 2$

$f(x_{E2}) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 2 = -2$

$f(x_{E3}) = f(-2) = -2$

Der Funktionsgraph hat im Punkt $\underline{\underline{P_{E1} = (0 / 2)}}$ ein lokales Maximum.

Die Minima des Funktionsgraphen liegen in den Punkten $\underline{\underline{P_{E2} = (2 / -2)}}$

und $\underline{\underline{P_{E3} = (-2 / -2)}}$

<u>Symmetrie</u>

Der Funktionsgraph verläuft symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt:

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 + 2 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 = f(x)$$

<u>Wendepunkte</u>

Notwendige Bedingung: $f^{\P}(x) = 0$

$$f^{\P}(x_w) = 3x_w^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_w^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_w^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_{w1} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \qquad x_{w2} = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x_w) \neq 0$, $f^{\P}(x_w) = 0$ (s. o.) und $f^{\mu\mu\mu}(x_w) \neq 0$

$$f^{\mu}(x_{w1}) = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 - 4\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} - 4\sqrt{\frac{4}{3}} = -2\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = -1\frac{7}{9}\sqrt{3} \neq 0$$

$$f^{\mu}(x_{w2} = \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 + 4\sqrt{\frac{4}{3}} = 2\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = 1\frac{7}{9}\sqrt{3} \neq 0$$

$$f^{\mu\mu\mu}(x_w) = 6\,x_w$$

$$f^{\mu\mu\mu}(x_{w1}) = f^{\mu\mu\mu}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} \neq 0 \qquad f^{\mu\mu\mu}(x_{w2}) = f^{\mu\mu\mu}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -4\sqrt{3} \neq =$$

Die hinreichende Bedingung für Wendepunkte ist also erfüllt.

$$f\,(x_{w1}) = f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4 - 2\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + 2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{9} - \frac{8}{3} = \frac{4}{9} - \frac{24}{9} + \frac{18}{9}$$

$$f\,(x_{w1}) = -\frac{2}{9} = f\,(x_{w2})$$

Der Funktionsgraph hat die Wendepunkte

$$\underline{\underline{W_1 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\;\middle|\;-\frac{2}{9}\right)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{W_2 = \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\;\middle|\;-\frac{2}{9}\right)}}$$

<u>Wertebereich</u>

Für den Wertebereich der Funktion gilt: $\underline{\underline{W(f) = \left\{-2 \leq f(x) < \ldots \;/\; f\,(x) \in R\right\}}}$

<u>Krümmung</u>

Linkskrümmung

$$f^{\P}(x) > 0 \iff 3\,x^2 - 4 > 0 \iff x^2 > \frac{4}{3}$$

$$x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad x > \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Der Funktionsgraph ist im Bereich $\underline{\underline{L_1 = \left\{-\ldots < x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \;/\; x \in R\right\}}}$

und im Bereich $\underline{\underline{L_2 = \left\{\frac{2}{3}\sqrt{3} < x < \ldots \;/\; x \in R\right\}}}$ linksgekrümmt.

<u>Rechtskrümmung</u>

$$f^{\P}(x) < 0 \iff 3\,x^2 - 4 < 0 \iff 3\,x^2 < 4 \iff x^2 < \frac{4}{3}$$

$$x > \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Der Funktionsgraph ist im Bereich $\underline{\underline{R = \left\{-\frac{2}{3}\sqrt{3} < x < \frac{2}{3}\sqrt{3} \;/\; x \in R\right\}}}$
rechtsgekrümmt.

Monotonie

Die Funktionswerte sind in den Bereichen

$$\underline{\underline{M_1 = \left\{ -\dots < x < -2 \ / \ x \in R \right\}}} \text{ und } \underline{\underline{M_2 = \left\{ 0 < x < 2 \ / \ x \in R \right\}}} \text{ monoton fallend.}$$

Die Funktionswerte sind in den Bereichen

$$\underline{\underline{M_3 = \left\{ -2 < x < 0 \ / \ x \in R \right\}}} \text{ und } \underline{\underline{M_4 = \left\{ 2 < x < \dots \ / \ x \in R \right\}}} \text{ monoton steigend.}$$

Verhalten für x ¡ $\pm \dots$

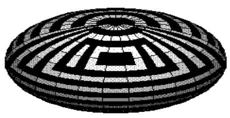
$$\lim_{x \text{ ¡ } \dots} f(x) = \lim_{x \text{ ¡ } \dots} \left(\frac{1}{4} x^4 - 2x^2 + 2 \right) = \lim_{x \text{ ¡ } \dots} x^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = \dots$$

$$\lim_{x \text{ ¡ } -\dots} f(x) = \lim_{x \text{ ¡ } -\dots} \left(\frac{1}{4} x^4 - 2x^2 + 2 \right) = \lim_{x \text{ ¡ } -\dots} x^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = \dots$$

Wertetabelle

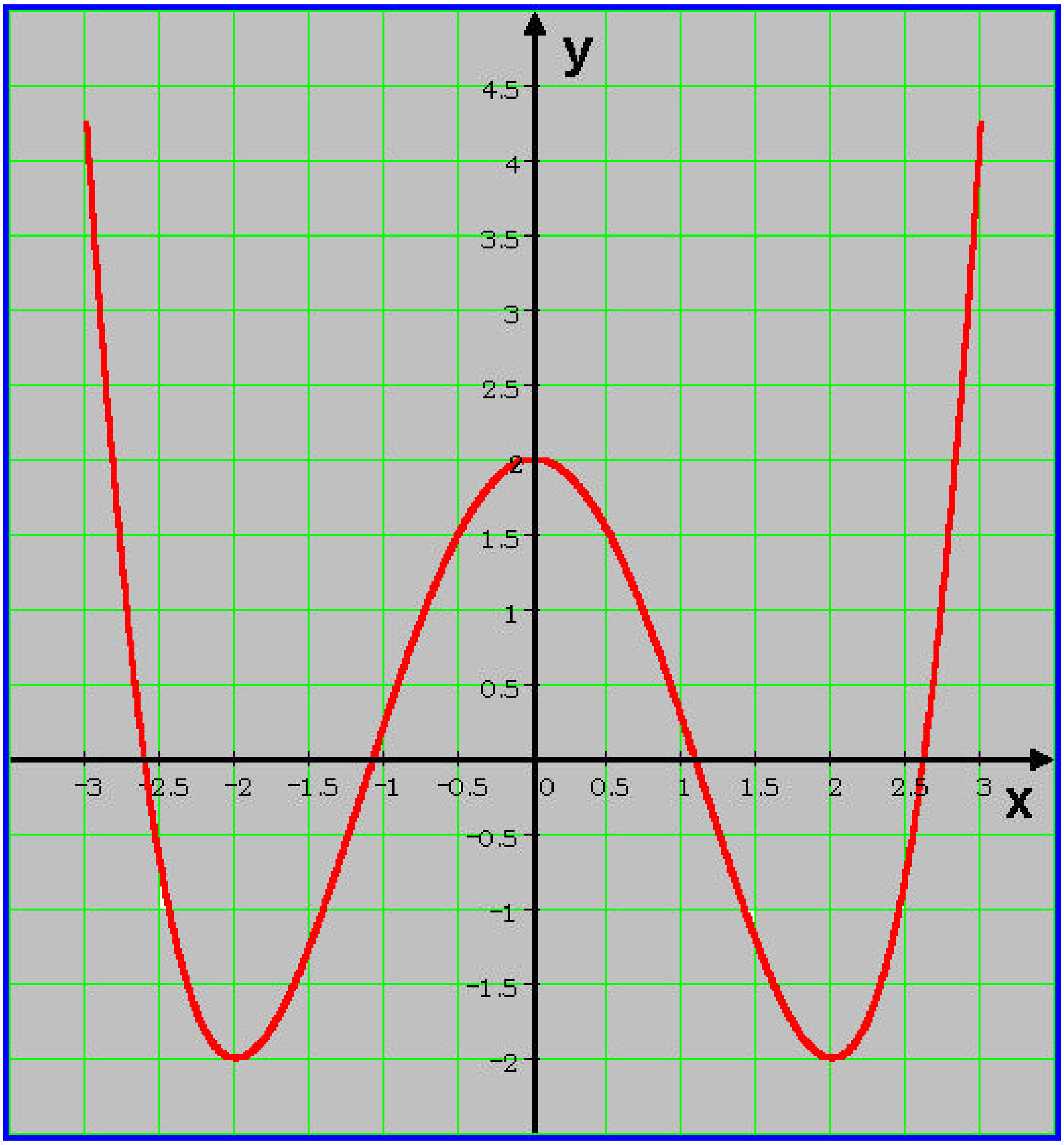
x	0	± 0,2	± 0,4	± 0,6	± 0,8	± 1	± 1,2	± 1,4
f(x)	2	1,92	1,686	1,312	0,822	0,25	− 0,362	− 0,96

x	± 1,6	± 1,8	± 2	± 2,2	± 2,4	± 2,6	± 2,8	± 3
f(x)	− 1,482	− 1,856	− 2	− 1,824	− 1,226	− 0,096	1,686	4,25



Graphik zu Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$$



Aufgabe 2

$$\mathbf{f(x) = 6x^4 - 16x^3 + 12x^2}$$

Definitionsbereich

Da f (x) eine ganze rationale Funktion ist, gilt: $\underline{\underline{D(f) = R}}$

Nullstellen

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
6x^4 - 16x^3 + 12x^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_{01} = 0, \quad x_{02} = 0 \\
6x^2 - 16x + 12 &= 0 \\
x^2 - \frac{8}{3}x + 2 &= 0 \\
x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{64}{36} &= -2 + \frac{64}{36} = -\frac{8}{36} = -\frac{2}{9} \\
x - \frac{4}{3} &= \sqrt{-\frac{2}{9}} \qquad \text{(in R nicht lösbar)}
\end{aligned}$$

Der Funktionsgraph schneidet die x-Achse nur einmal, und zwar im Koordinatenursprung.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Der Graph schneidet die y-Achse im Koordinatenursprung.

Extrempunkte

$f'(x) = 24x^3 - 48x^2 + 24x$

Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$

$24x_E^3 - 48x_E^2 + 24x_E = 0 \Rightarrow x_{E1} = 0$

$24x_E^2 - 48x_E + 24 = 0 \Leftrightarrow x_E^2 - 2x_E + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_{E2} = 1$

Hinreichende Bedingung: $f'(x_E) = 0$ (s.o.) und $f''(x_E) \neq 0$

$f''(x) = 72x^2 - 96x + 24$

$f''(x_{E1}) = f''(0) = 24 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$f^{\P}(x_{E2}) = f^{\P}(1) = 24 - 48 + 24 = 0 \;\Rightarrow\;$ kein lokales Extrema

$f(0) = 0 \qquad\qquad f(1) = 2$

Der Punkt $\underline{\underline{S = (1 / 2)}}$ ist ein Sattelpunkt.

Die Funktion hat im <u>K o o r d i n a t e n u r s p r u n g</u> ein lokales Minimum.

<u>Wendepunkte</u>

Notwendige Bedingung: $f^{\P}(x) = 0$

$f^{\P}(x) = 72x^2 - 96x + 24$

$$72x_w^2 - 96x_w + 24 = 0$$

$$x_w^2 - \frac{4}{3}x_w = -\frac{1}{3}$$

$$x_w^2 - \frac{4}{3}x_w + \frac{4}{9} = -\frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

$$x_w - \frac{2}{3} = \pm\frac{1}{3}$$

$$x_{w1} = 1 \qquad \text{und} \qquad x_{w2} = \frac{1}{3}$$

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x) \neq 0$, $f^{\P}(x) = 0$ (s.o.) und $f^{\mu\mu\mu}(x) \neq 0$

$f^{\mu\mu\mu}(x) = 144x - 96$

$f^{\mu}(x_{w1}) = f^{\mu}(1) = 24 - 48 + 24 = 0 \qquad f^{\mu\mu\mu}(1) = 144 - 96 = 48 \neq 0$

Die Stelle $x_{w1} = 1$ erfüllt die hinreichende Bedingung für Wendestellen nicht.
Der Punkt $S = (x_{w1} / f(x_{w1}) = (1 / 2)$ ist also kein echter Wendepunkt, sondern wie schon oben bei der Bestimmung der lokalen Extrema erwähnt, ein sog. Sattelpunkt.

$$f^{\mu}(x_{w2}) = f^{\mu}\left(\frac{1}{3}\right) = 24\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 48\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 24\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{9} - \frac{48}{9} + \frac{72}{9} = \frac{32}{9} = 3\frac{5}{9} \neq 0$$

$$f^{\mu\mu\mu}(x_{w2}) = f^{\mu\mu\mu}\left(\frac{1}{3}\right) = 144\cdot\frac{1}{3} - 96 = 48 - 96 = -48 \neq 0$$

Die Stelle $x_{w2} = \frac{1}{3}$ erfüllt also die hinreichende Bedingung.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 16\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27} - \frac{16}{27} + \frac{36}{27} = \frac{22}{27}$$

Die Funktion hat den Wendepunkt $\underline{\underline{W = \left(\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{22}{27}\right)}}$

<u>Verhalten für x ¡ ±…</u>

$$\lim_{x\ \text{¡}\ \text{…}} f(x) = \lim_{x\ \text{…}} (6x^4 - 16x^3 + 12x^2) = \lim_{x\ \text{¡}\ \text{…}} x^4\left(6 - \frac{16}{x} + \frac{12}{x^2}\right) = \text{…}$$

$$\lim_{x\ \text{¡}\ -\text{…}} f(x) = \lim_{x\ \text{¡}\ -\text{…}} (6x^4 - 16x^3 + 12x^2) = \lim_{x\ \text{¡}\ -\text{…}} x^4\left(6 - \frac{16}{x} + \frac{12}{x^2}\right) = \text{…}$$

<u>Wertebereich</u>

Für den Wertebereich der Funktion gilt:

$$\underline{\underline{W(f) = \left\{0 \le f(x) < \text{…}\ /\ f(x) \in R\right\} = R^{\ge 0}}}$$

<u>Krümmung</u>

Linkskrümmung

$f^{\P}(x) > 0$

$72x^2 - 96x + 24 \quad > \quad 0$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \quad > \quad \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad x - \frac{2}{3} > \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad x - \frac{2}{3} < -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$$x > 1 \quad \vee \quad x < \frac{1}{3}$$

Der Funktionsgraph ist in den folgenden beiden Bereichen linksgekrümmt:

$$\underline{\underline{L_1 = \left\{-\text{…} < x < \frac{1}{3}\ /\ x \in R\right\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{L_2 = \left\{1 < x < \text{…}\ /\ x \in R\right\}}}$$

Rechtskrümmung

$f^{¶}(x) \;<\; 0$

$$72\,x^2 - 96\,x + 24 \quad < \quad 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \quad < \quad \frac{1}{9}$$

$$x \;>\; \frac{1}{3} \qquad \wedge \qquad x \;<\; 1$$

Der Funktionsgraph ist im Bereich rechtsgekrümmt.

$$\underline{\underline{R = \left\{\frac{1}{3} < x < 1 \;/\; x \in R\right\}}}$$

Monotonie

Der Funktionsgraph ist im Bereich monoton fallend.

$$\underline{\underline{M_1 = \left\{-\ldots < x < 0 \;/\; x \in R\right\}}}$$

Der Funktionsgraph ist im Bereich monoton steigend·

$$\underline{\underline{M_2 = \left\{0 < x < \ldots \;/\; x \in R\right\}}}$$

Symmetrie

$$f(-x) = 6\,(-x)^4 - 16\,(-x)^3 + 12\,(-x)^2 = 6\,x^4 + 16\,x^3 + 12\,x^2 \;\neq\; f(x)$$
$$f(-x) \;\neq\; f(x) = 6\,x^4 - 16\,x^3 + 12\,x^2$$

$$-f(x) = -6\,x^4 + 16\,x^3 - 12\,x^2 \;\neq\; f(-x)$$

Der Funktionsgraph ist weder achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. In der Funktionsgleichung kommen sowohl Terme mit ungeradem Exponenten als auch Terme mit geradem Exponenten vor.

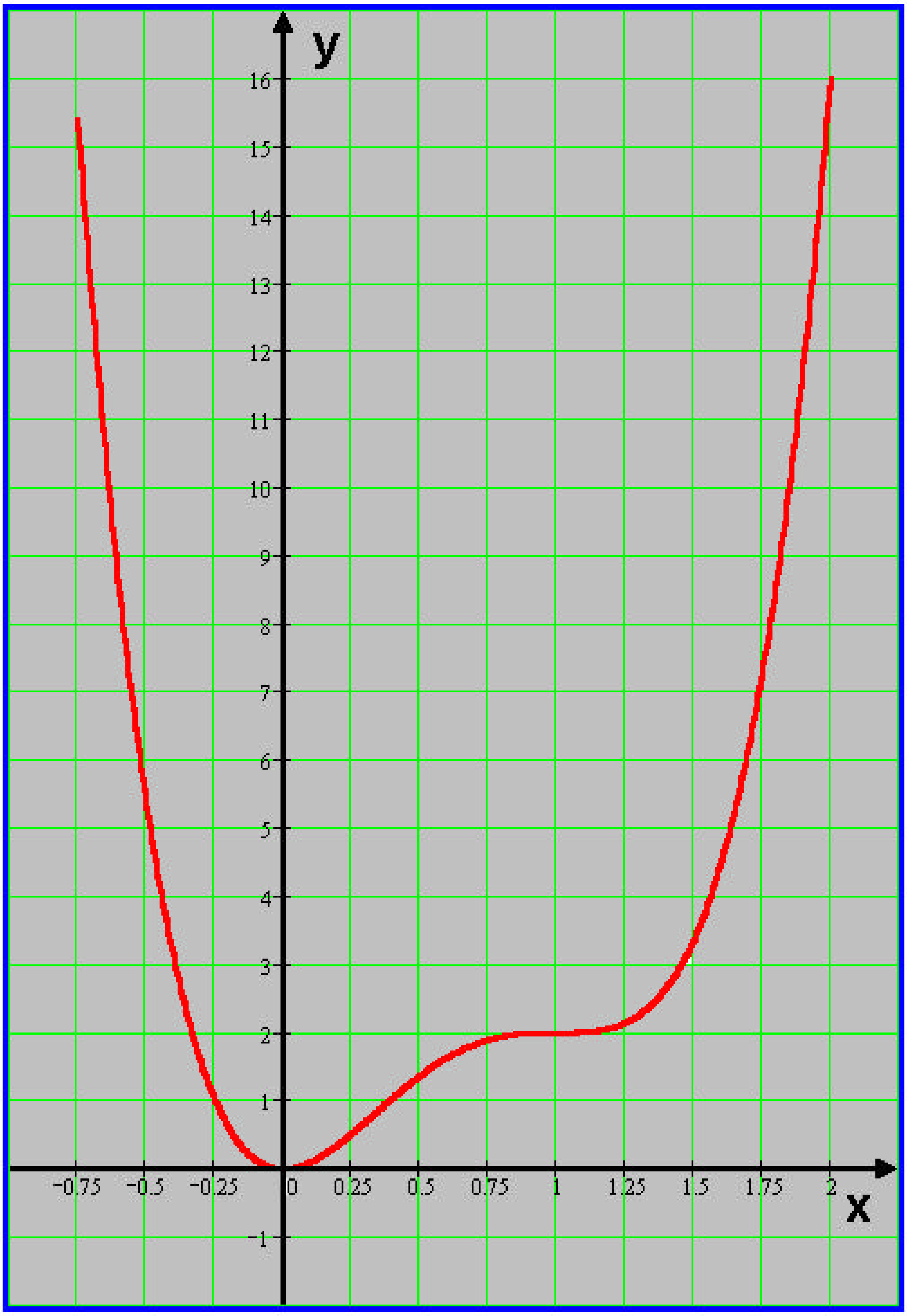
Wertetabelle

x	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	0,25	0,5
f (x)	15,398	5,375	1,023	0	0,525	1,375

x	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
f (x)	1,898	2	2,148	3,375	7,237	16

Graphik zu Aufgabe 2

$$f(x) = 6x^4 - 16x^3 + 12x^2$$



Aufgabe 3

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$

Definitionsbereich

Da $f(x)$ eine ganze rationale Funktion ist, gilt: $\underline{\underline{D(f) = R}}$

Nullstellen

$x_{01} = 1$ (durch Probieren)

$$(-x^3 + 3x^2 + x - 3) : (x - 1) = -x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^3 + x^2} \\
\qquad 2x^2 + x \\
\qquad \underline{2x^2 - 2x} \\
\qquad\qquad 3x - 3 \\
\qquad\qquad \underline{3x - 3} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
-x^2 + 2x + 3 &= 0 \\
x^2 - 2x &= 3 \\
x^2 - 2x + 1 &= 4 \\
x - 1 &= \pm 2 \\
x_{02} &= 3 \\
x_{03} &= -1
\end{aligned}$$

Die Nullstellen der Funktion sind $\underline{\underline{x_{01} = 1}}$, $\underline{\underline{x_{02} = 3}}$ und $\underline{\underline{x_{03} = -1}}$.

Schnittpunkt mit der y-Achse

$f(0) = -3$

Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse im Punkt $\underline{\underline{P_y = (0 / -3)}}$

Extrempunkte

Notwendige Bedingung: $f^{\mu}(x) = 0$

$$f^{\mu}(x) = -3x^2 + 6x + 1$$

$$
\begin{aligned}
3\,x_E^2 + 6\,x_E &= 1 \\
x_E^2 - 2\,x_E &= \frac{1}{3} \\
x_E^2 - 2\,x_E + 1 &= \frac{4}{3} \\
x_{E1} &= 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \approx \quad 2{,}1547 \\
x_{E2} &= 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad \approx \quad -0{,}1547
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ (s.o.) und $f''(x) \neq 0$

$f''(x) = -6\,x + 6$

$f''(x_{E1}) = f''(2{,}1547) = -6{,}9282 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum

$f''(x_{E2}) = f''(-0{,}1547) = 6{,}9282 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Minimum

Die hinreichende Bedingung ist für x_{E1} und x_{E2} erfüllt.

$f(x_{E1}) = f(2{,}1547) \approx 3{,}079 \qquad f(x_{E2}) = f(-0{,}1547) \approx -3{,}079$

Der Funktionsgraph hat im Punkt $\underline{\underline{E_1 = (2{,}1547\ /\ 3{,}079)}}$ ein lokales Maximum

und im Punkt $\underline{\underline{E_2 = (-0{,}1547\ /\ -3{,}079)}}$ ein lokales Minimum.

<u>Wendepunkte</u>

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = -6\,x + 6$

$-6\,x_w + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6\,x_w = -6 \quad \Leftrightarrow \quad x_w = 1$

Hinreichende Bedingung: $f'(x_w) \neq 0$, $f''(x_w) = 0$ (s.o.) und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(x) = -6 \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = -6 \neq 0 \qquad\qquad f'(1) = -3 + 6 + 1 \neq 0$

Die hinreichende Bedingung für Wendestellen ist also erfüllt.

$f(1) = -1 + 3 + 1 - 3 = 0$

Der Funktionsgraph hat den Wendepunkt $\underline{\underline{W = (1\ /\ 0)}}$

Verhalten für x ¡ ±…

$$\lim_{x\ ¡\ \ldots} f(x) = \lim_{x\ ¡\ \ldots} (-x^3 + 3x^2 + x - 3) = \lim_{x\ ¡\ \ldots} x^3\left(-1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = -\ldots$$

$$\lim_{x\ ¡\ -\ldots} f(x) = \lim_{x\ ¡\ -\ldots} (-x^3 + 3x^2 + x - 3) = \lim_{x\ ¡\ -\ldots} x^3\left(-1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = \ldots$$

Wertebereich

Für den Wertebereich der Funktion gilt: $\underline{\underline{W(f) = R}}$

Krümmung

Linkskrümmung

$f^{¶}(x) > 0$

$-6x + 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6x > -6 \quad \Leftrightarrow \quad 6x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$

Der Funktionsgraph ist im Bereich $\underline{\underline{L = \left\{-\ldots < x < 1 \ / \ x \in R\right\}}}$ links-gekrümmt.

Rechtskrümmung

$f^{¶}(x) < 0$

$-6x + 6 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6x < -6 \quad \Leftrightarrow \quad 6x > 6 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$

Der Funktionsgraph ist im Bereich $\underline{\underline{R = \left\{1 < x < \ldots \ / \ x \in R\right\}}}$ rechts-gekrümmt.

Monotonie

Der Funktionsgraph ist in den Bereichen

$\underline{\underline{M_1 = \left\{-\ldots < x < -0{,}1547 \ / \ x \in R\right\}}}$ und $\underline{\underline{M_2 = \left\{2{,}1547 < x < \ldots \ / \ x \in R\right\}}}$

monoton fallend, und im Bereich $\underline{\underline{M_3 = \left\{-0{,}1547 < x < 2{,}1547 \ / \ x \in R\right\}}}$

monoton steigend.

Symmetrie

$$f(-x) = -(-x)^3 + 3(-x)^2 - x - 3 = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

$$\neq \quad f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$

$$-f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \neq f(-x)$$

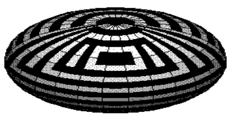
Der Funktionsgraph ist weder achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. In der Funktionsgleichung kommen sowohl Terme mit ungeradem Exponenten als auch Terme mit geradem Exponenten vor.

Wertetabelle

x	$-1{,}5$	$-1{,}4$	$-1{,}2$	-1	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0
f (x)	5,625	4,224	1,848	0	$-1{,}368$	$-2{,}304$	$-2{,}856$	$-3{,}072$	-3

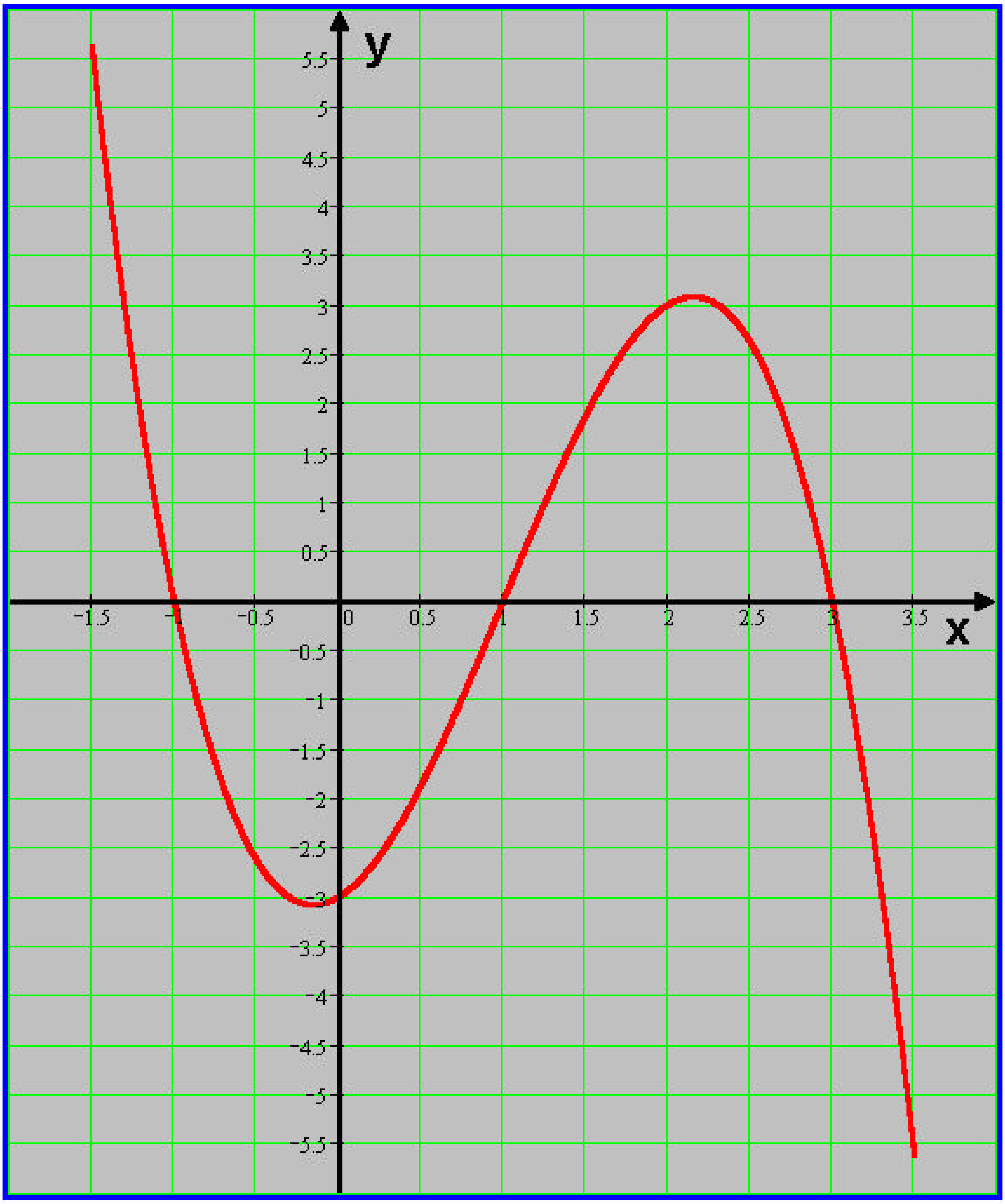
x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
f (x)	$-2{,}688$	$-2{,}184$	$-1{,}536$	$-0{,}792$	0	0,792	1,536	2,814	2,688

x	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,5
f (x)	3	3,072	2,856	2,304	1,368	0	$-1{,}848$	$-4{,}224$	$-5{,}625$



Graphik zu Aufgabe 3

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$



Aufgabe 4

$$\mathbf{f\,(x)\;=\;\frac{1}{50}\,x^5\;-\;x^3\;+\;12\frac{1}{2}\,x}$$

Definitionsbereich

Da f (x) eine ganze rationale Funktion ist, gilt: $\underline{\underline{D\,(f)\;=\;R}}$

Symmetrie

$$f\,(-x)\;=\;\frac{1}{50}\,(-x)^5-(-x)^3+12\frac{1}{2}\,(-x)\;=\;-\frac{1}{50}\,x^5+x^3-12\frac{1}{2}\,x$$

$$f\,(-x)\;=\;-(\frac{1}{50}\,x^5-x^3-12\frac{1}{2}\,x)\;\;=\;\;-f\,(x)$$

Der Graph von f verläuft <u>punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.</u>

Verhalten für x ¡ ±...

$$\lim_{x\ \text{¡}\ \dots} f\,(x)\;=\;\lim_{x\ \text{¡}\ \dots}\left(\frac{1}{50}\,x^5-x^3+12\frac{1}{2}\,x\right)=\lim_{x\ \text{¡}\ \dots} x^5\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{x^2}+\frac{25}{2\,x^4}\right)\;=\;\dots$$

$$\lim_{x\ \text{¡}\ -\dots} f\,(x)\;=\;\lim_{x\ \text{¡}\ -\dots}\left(\frac{1}{50}\,x^5-x^3+12\frac{1}{2}\,x\right)=\lim_{x\ \text{¡}\ -\dots} x^5\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{x^2}+\frac{25}{2\,x^4}\right)\;=\;\dots$$

Wertebereich

Der Wertebereich der Funktion f ist $\underline{\underline{W\,(f)\;=\;R}}$.

Nullstellen

Da die Funktion f (x) punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist, gilt: $x_{01}\;=\;0$.

$$\frac{1}{50}\,x^4-x^2+\frac{25}{2}\;=\;0 \qquad\qquad x_{02}\;=\;5 \qquad \text{durch Probe}$$

Aufgrund der Punktsymmetrie ist $x_{03}\;=\;-5$ eine weitere Nullstelle.

$$(x\;-\;5)\,(x\;+\;5)\;=\;x^2\;-\;25$$

$$\left(\frac{1}{50}\,x^4-x^2+\frac{25}{2}\right):\left(x^2-25\right)\;=\;\frac{1}{50}\,x^2-\frac{1}{2}$$

$$\underline{\frac{1}{50}\,x^4-\frac{1}{2}\,x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{25}{2}$$

$$\underline{-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{25}{2}}$$

$$0$$

$\frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{50}x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 25 \quad \Rightarrow$

$x_{04} = x_{02} = 5$ und $x_{05} = x_{03} = -5$

Die Nullstellen der unktion sind: $\underline{\underline{x_{01} = 0}}$, $\underline{\underline{x_{02} = 5}}$ und $\underline{\underline{x_{03} = -5}}$

An den Stellen x_{02} und x_{03} liegt eine doppelte Nullstelle vor.

<u>Schnittpunkt mit der y-Achse</u>

Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse im <u>K o o r d i n a t e n u r s p r u n g</u>.

<u>Extrempunkte</u>

Notwendige Bedingung: $f^{\mu}(x) = 0$

$f^{\mu}(x) = \frac{1}{10}x^4 - 3x^2 + 12\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rcccl}
\frac{1}{10}x_E^4 - 3x_E^2 + 12\frac{1}{2} & = & 0 & & \text{Setze } x_E^2 = z \\
\frac{1}{10}z^2 - 3z + 12\frac{1}{2} & = & 0 & & \\
z^2 - 30z & = & -125 & & \\
z^2 - 30z + 225 & = & -125 + 225 & = & 100 \\
z - 15 & = & \pm 10 & \Rightarrow & \\
z_1 = 25 & \text{und} & z_2 = 5 & & \\
x_E^2 = 25 & \Rightarrow & x_E^3 = \sqrt{5} & \text{und} & x_E^4 = -\sqrt{5}
\end{array}$$

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x_E) = 0$ (s.o.) und $f^{\P}(x_E) \neq 0$

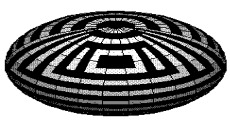
$f^{\P}(x) = \frac{2}{5}x^3 - 6x$

$f^{\P}(x_{E1}) = f^{\P}(5) = \frac{2}{5} \cdot 5^3 - 6 \cdot 5 = 50 - 30 = 20 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$f^{\P}(x_{E2}) = f^{\P}(-5) = \frac{2}{5} \cdot (-5)^3 - 6 \cdot (-5) = -50 + 30 = -20 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f^{\P}(x_{E3}) = f^{\P}(\sqrt{5}) = \frac{2}{5} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^3 - 6 \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} - 6 \cdot \sqrt{5} = -4 \cdot \sqrt{5}$

$f^{\P}(\sqrt{5} = -4 \cdot \sqrt{5} < 0 \Rightarrow$ Maximum



$$f^{\P}(x_{E4}) = f^{\P}(-\sqrt{5}) = \frac{2}{5} \cdot \left(-\sqrt{5}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\sqrt{5}\right) = -2 \cdot \sqrt{5} + 6 \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot \sqrt{5}$$

$$f^{\P}(-\sqrt{5}) = 4 \cdot \sqrt{5} \quad > \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

Die hinreichende Bedingung für Extremstellen ist für die Stellen x_{E1}, x_{E2}, x_{E3} und x_{E4} also erfüllt.

$$f(5) = f(-5) = 0$$

$$f(\sqrt{5}) = \frac{1}{50} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^5 - \left(\sqrt{5}\right)^3 + 12\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} = 8 \cdot \sqrt{5} \approx 17{,}889$$

$$f(-\sqrt{5}) = -f(\sqrt{5}) = -8 \cdot \sqrt{5} \approx -17{,}889$$

Die beiden lokalen Minima der Funktion f liegen in den Punkten

$$\underline{\underline{E_1 = (5 \,/\, 0)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_4 = (-\sqrt{5} \,/\, -8 \cdot \sqrt{5})}}$$

Die beiden lokalen Maxima der Funktion f liegen in den Punkten

$$\underline{\underline{E_2 = (5 \,/\, 0)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_3 = (\sqrt{5} \,/\, 8 \cdot \sqrt{5})}}$$

<u>Wendepunkte</u>

Notwendige Bedingung: $f^{\P}(x) = 0$

$$f^{\P}(x) = \frac{2}{5} x^3 - 6x$$

$$f^{\P}(x_w) = \frac{2}{5} x_w^3 - 6x_w = 0 \qquad\qquad x_{w1} = 0$$

$$\frac{2}{5} x_w^2 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5} x_w^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x_w^2 = 15 \quad \Rightarrow$$

$$x_{w1} = \sqrt{15} \qquad\qquad x_{w2} = -\sqrt{15}$$

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x_w) \neq 0$, $\quad f^{\P}(x_w) = 0$ (s.o.) und $f^{\mu\mu\mu}(x_w) \neq 0$

$$f^{\mu}(x_{w1}) = f^{\mu}(0) = 12\frac{1}{2} \quad \neq \quad 0$$

$$f^{\mu}(x_{w2}) = f^{\mu}(\sqrt{15}) = \frac{1}{10} \cdot \left(\sqrt{15}\right)^4 - 3 \cdot \left(\sqrt{15}\right)^2$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 225 - 45 + 12\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2} = -10 \quad \neq \quad 0$$

$$f^{\mu}(x_{w2}) = f^{\mu}(-\sqrt{15}) = -10 \quad \neq \quad 0$$

Die dritte Ableitung lautet: $f'''(x) = \frac{6}{5}x^2 - 6$

$f'''(x_{w1}) = f'''(0) = -6 \neq 0$

$f'''(x_{w2}) = f'''(\sqrt{15}) = \frac{6}{5} \cdot 15 - 6 = 18 - 6 = 12 \neq 0$

$f'''(x_{w3}) = f'''(-\sqrt{15}) = 12 \neq 0$

Die hinreichende Bedingung für Wendestellen ist von den Stellen x_{w1}, x_{w2} und x_{w3} erfüllt.

$f(x_{w1}) = f(0) = 12\frac{1}{2}$

$$f(x_{w2}) = f(\sqrt{15}) = \frac{1}{50} \cdot \left(\sqrt{15}\right)^5 - \left(\sqrt{15}\right)^3 + 12\frac{1}{2} \cdot \sqrt{15}$$
$$= \frac{1}{50} \cdot 225 \cdot \sqrt{15} - 15 \cdot \sqrt{15} + 12\frac{1}{2} \cdot \sqrt{15} = 2 \cdot \sqrt{15} \approx 7{,}746$$

$f(x_{w3}) = f(-\sqrt{15}) = -2 \cdot \sqrt{15} \approx -7{,}746$

Die Funktion $f(x)$ hat die folgenden drei Wendepunkte: $\underline{\underline{W_1 = (0 \,/\, 12\frac{1}{2})}}$,

$\underline{\underline{W_2 = (\sqrt{15} \,/\, 2 \cdot \sqrt{15}) \approx (3{,}872 \,/\, 7{,}746)}}$ und $\underline{\underline{W_2 = (\sqrt{15} \,/\, 2 \cdot \sqrt{15}) \approx (3{,}872 \,/\, 7{,}746)}}$

<u>Krümmung</u>

Linkskrümmung

$f''(x) = \frac{2}{5}x^3 - 6x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(\frac{2}{5}x^2 - 6\right) > 0$

1. Fall: Sei $x > 0 \quad \Rightarrow$

$\frac{2}{5}x^2 - 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}x^2 > 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 15 \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt{15}$

2. Fall: Sei $x < 0 \quad \Rightarrow$

$\frac{2}{5}x^2 - 6 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}x^2 < 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 15 \quad \Rightarrow \quad x > -\sqrt{15}$

Der Funktionsbereich ist in den folgenden Bereichen linksgekrümmt:

$\underline{\underline{L_1 = \left\{-\sqrt{15} < x < 0 \,/\, x \in \mathrm{R}\right\}}}$ und $\underline{\underline{L_2 = \left\{\sqrt{15} < x < \ldots \,/\, x \in \mathrm{R}\right\}}}$

Rechtskrümmung

$$f''(x) \;=\; \frac{2}{5}\,x^3 - 6\,x \;<\; 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\left(\frac{2}{5}\,x^2 - 6\right) \;<\; 0$$

2. Fall: Sei $x \;>\; 0 \qquad \Rightarrow$

$$\frac{2}{5}\,x^2 - 6 \;<\; 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2}{5}\,x^2 \;<\; 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 \;<\; 15 \qquad \Rightarrow \qquad x \;<\; \sqrt{15}$$

1. Fall: Sei $x \;<\; 0 \qquad \Rightarrow$

$$\frac{2}{5}\,x^2 - 6 \;>\; 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2}{5}\,x^2 \;>\; 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 \;>\; 15 \qquad \Rightarrow \qquad x \;<\; -\sqrt{15}$$

Der Funktionsgraph ist in den folgenden Bereichen rechtsgekrümmt:

$$\underline{\underline{R_1 = \left\{ -\ldots < x < -\sqrt{15} \;\;/\;\; x \in R \right\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{R_2 = \left\{ 0 < x < \sqrt{15} \;\;/\;\; x \in R \right\}}}$$

Monotonie

Der Funktionsgraph ist in den folgenden Bereichen monoton steigend:

$$\underline{\underline{S_1 = \left\{ -\ldots < x < -5 \;\;/\;\; x \in R \right\}}}, \quad \underline{\underline{S_2 = \left\{ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \;\;/\;\; x \in R \right\}}} \quad \text{und}$$

$$\underline{\underline{S_3 = \left\{ 5 < x < \ldots \;\;/\;\; x \in R \right\}}}$$

Der Funktionsgraph ist in den folgenden Bereichen monoton fallend:

$$\underline{\underline{F_1 = \left\{ -5 < x < \sqrt{5} \;\;/\;\; x \in R \right\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{F_2 = \left\{ \sqrt{5} < x < 5 \;\;/\;\; x \in R \right\}}}$$

Wertetabelle

x	− 6,25	− 6	− 5,5	− 5	− 4,5	− 4	− 3,5	− 3	− 2,5
f (x)	− 24,72	− 14,52	− 3,03	0	2,03	− 6,48	− 11,38	− 15,36	− 17,58

x	− 2	− 1,5	− 1	− 0,5	0	0,5	1	1,5	2
f (x)	− 17,64	− 15,23	− 11,52	− 6,13	0	6,13	11,52	15,23	17,64

x	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,25
f (x)	17,58	15,36	11,38	6,48	2,03	0	3,03	14,52	24,72

Graphik zu Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{1}{50}x^5 - x^3 + 12\frac{1}{2}x$$