K l a u s u r Nr.1 1.Hj LkM 12

Aufgabe 1

Führen Sie für die folgenden Funktionen eine Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) durch.

a) $\mathbf{f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{8}}$

(Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrie, Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse, Extrempunkte, Wendepunkte, Monotonie, Verhalten für x ¡ ±..., Krümmung, Wertetabelle für $-6 \le x \le 10$, Zeichnung des Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem)

b) $\mathbf{f(x) = -\frac{1}{32}x^4 + x^2 - 3\frac{1}{2}}$

(Symmetrie, Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse, Extrempunkte, Wertebereich, Wendepunkte, Wertetabelle für $-6 \le x \le 6$, Zeichnung des Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem)

Aufgabe 2

a) Beweisen Sie: Sind die Funktionen u und v differenzierbar an der Stelle x, so ist auch die Funktion f zu $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ differenzierbar an der Stelle x, und es gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f^{\mu}(x) = u^{\mu}(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v^{\mu}(x)$$

b) Leiten Sie eine Produktregel für den Fall her, dass sich die Funktion f als Produkt von drei differnzierbaren Funktionen darstellen läßt. Es soll also gelten: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$

c) Geben Sie die Produktregel für den allgemeinen Fall an, dass sich die Funktion f als Produkt von n differenzierbaren Funktionen $a_1, a_2, \cdot \cdot \cdot \cdot, a_n$ darstellen läßt. Es soll also gelten:
$f(x) = a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot a_3(x) \cdot . . . . . . \cdot a_{n-1}(x) \cdot a_n(x)$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Ableitungen zu den folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3x^2 \sin 4x$ **b)** $f(x) = 7(3x^5 - 4x^3 + 2x)^{17}$

c) $f(x) = \cos(3x^2 - 2x)$ **d)** $f(x) = \sqrt{\tan x}$

e) Bestimmen Sie zu der folgenden Funktion die ersten drei Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

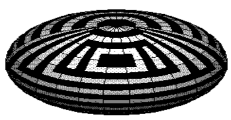
Aufgabe 4

Der Graph einer ganzen rationalen Funktion 5. Grades verläuft durch den Koordinatenursprung und hat dort einen Extrempunkt.
Der Funktionsgraph verläuft außerdem durch den Punkt $P = (1 / -5)$.
Ein Wendepunkt der Funktion hat die Koordinaten $W = (2 / -20)$.
Die Wendetangente, die durch W verläuft, hat die Steigung $m = -18$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und die Art des Extremums im Koordinatenursprung.

Aufgabe 5

Eine ganze rationale Funktion dritten Grades $f(x)$, die symmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft, hat an der Stelle $x_M = 4$ ein lokales Maximum.
Eine Parabel $p(x)$ hat den Scheitelpunkt $S = (2 / 10)$. Der Graph der Parabel schneidet den Graphen der ganzen rationalen Funktion f in deren beiden Extrempunkten.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der beiden Funktionen $f(x)$ und $p(x)$ so wie die Koordinaten der beiden Extrempunkte.



L ö s u n g e n

Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{8}$$

Definitionsbereich

Da f (x) eine ganze rationale Funktion ist, gilt: $\underline{\underline{D(f) = R}}$

Wertebereich

Da der Grad der Funktion f ungerade ist, gilt: $\underline{\underline{W(f) = R}}$

Symmetrie

Weil in der Funktionsgleichung sowohl Terme mit geradem Exponenten als auch Terme mit ungeradem Exponenten auftreten, ist der Graph von f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

$$f(-x) = \frac{1}{8}(-x)^3 - \frac{3}{4}(-x)^2 - 4\frac{1}{2}(-x) + 5\frac{1}{8} = -\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5\frac{1}{8} \neq f(x)$$

(also nicht achsensymmetrisch)

$$-f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 4\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{8} \neq f(-x)$$

(also nicht punktsymmetrisch)

Nullstellen

$x_{01} = 1$ durch Probe

$$\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{41}{8}\right) : (x - 1) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{8}x - \frac{41}{8}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2} \\
\qquad -\frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x \\
\qquad \underline{-\frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{8}x} \\
\qquad\qquad -\frac{41}{8}x + \frac{41}{8} \\
\qquad\qquad \underline{-\frac{41}{8}x + \frac{41}{8}} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\frac{1}{8}\,x^2 - \frac{5}{8}\,x - \frac{41}{8} \quad = \quad 0$$

$$x^2 - 5\,x \quad = \quad 41$$

$$x^2 + 5\,x + 6\frac{1}{4} \quad = \quad 47\frac{1}{4} \quad = \quad \frac{189}{4}$$

$$x_{02} \quad = \quad 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{189} \quad \approx \quad 9{,}374$$

$$x_{03} \quad = \quad 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{189} \quad \approx \quad -4{,}374$$

Die Funktion hat die Nullstellen $\underline{\underline{x_{01} = 1}}$, $\underline{\underline{x_{02} = 9{,}374}}$ und $\underline{\underline{x_{03} = -4{,}374}}$.

<u>Schnittpunkt mit der y-Achse</u>

$$f(0) = 5\frac{1}{8}$$

Der Graph von f schneidet die y-Achse an der Stelle $\underline{\underline{y_S = 5\frac{1}{8}}}$.

<u>Extrempunkte</u>

<u>Notwendige Bedingung:</u> $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{3}{2}\,x - 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8}\,x_E^2 - \frac{3}{2}\,x_E - 4\frac{1}{2} \quad = \quad 0 \qquad |\cdot \frac{3}{8}$$

$$x_E^2 - 4\,x_E - 12 \quad = \quad 0$$

$$x_E^2 - 4\,x_E \quad = \quad 12 \qquad | \text{ quadratische Ergänzung}$$

$$x_E^2 - 4\,x_E + 4 \quad = \quad 16$$

$$x_E - 2 \quad = \quad \pm 4$$

$$x_{E1} \quad = \quad 6$$

$$x_{E2} \quad = \quad -2$$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen: $f'(x_E) = 0$ s. o. und $f''(x_E) \neq 0$

$$f''(x) \quad = \quad \frac{3}{4}\,x - \frac{3}{2}$$

$$f''(x_{E1}) = f''(6) \quad = \frac{3}{4}\cdot 6 - \frac{3}{2} \quad = \quad 3 \; > \; 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$f''(x_{E2}) = f''(-2) = \frac{3}{4}\cdot(-2) - \frac{3}{2} = -3 \; < \; 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

Funktionswerte

$f(x_{E1}) = f(6) = -21\frac{7}{8} = -21{,}875 \qquad f(x_{E2}) = f(-2) = 10\frac{1}{8} = 10{,}125$

Die Funktion hat im Punkt $\underline{\underline{T = (6 \,/\, -21{,}875)}}$ ein lokales Minimum

und im Punkt $\underline{\underline{H = (-2 \,/\, 10{,}125)}}$ ein lokales Maximum.

Wendepunkte

Notwendige Bedingung: $f^{\P}(x) = 0$

$$\frac{3}{4}x_W - \frac{3}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x_W = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_W = 2$$

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x_W) \neq 0$, $f^{\P}(x_W) = 0$ s.o. $f^{\mu\mu\mu}(x_W) \neq 0$

$$f^{\mu}(2) = \frac{3}{8}\cdot 2^2 - \frac{3}{2}\cdot 2 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2} - \frac{6}{2} - \frac{9}{2} = -6 \neq 0$$

$f^{\mu\mu\mu}(x) = \frac{3}{4}$ Also gilt auch: $f^{\mu\mu\mu}(x_W) = f^{\mu\mu\mu}(2) = \frac{3}{4} \neq 0$

Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt ist also erfüllt.
Funktionswert

$f(x_W) = f(2) = -5\frac{7}{8}$

Die Funktion $f(x)$ hat den Wendepunkt $\underline{\underline{W = (2 \,/\, -5\frac{7}{8}) = (2 \,/\, -5{,}875)}}$

Monotonie

Die Funktion $f(x)$ ist in den Bereichen $\underline{\underline{M_{S1} = \{-\ldots < x < -2 \,/\, x \in R\}}}$

und $\underline{\underline{M_{S2} = \{6 < x < \ldots \,/\, x \in R\}}}$ monoton steigend und im Bereich

$\underline{\underline{M_F = \{-2 < x < 6 \,/\, x \in R\}}}$ monoton fallend.

Verhalten für x ¡ $\pm\ldots$

$$\lim_{x \text{ ¡ } \ldots} f(x) = \lim_{x \text{ ¡ } \ldots} \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{8}\right) =$$

$$\lim_{x \text{ ¡ } \ldots} x^3\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{4x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{41}{8x^3}\right) = \underline{\underline{\ldots}}$$

$$\lim_{x \text{ ¡ } -\ldots} x^3\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{4x} - \frac{9}{x^2} + \frac{41}{8x^3}\right) = \underline{\underline{-\ldots}}$$

Krümmung

Rechtskrümmung: f¶(x) < 0

$\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x < \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$

Der Funktionsgraph ist im Bereich $R = \{-\ldots < x < 2 \;/\; x \in R\}$ rechtsgekrümmt.

Linkskrümmung: f¶(x) > 0

$\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x > \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$

Der Funktionsgraph ist im Bereich $R = \{-2 < x < \ldots \;/\; x \in R\}$ linksgekrümmt.

Wertetabelle

x	−6	−5,5	−5	−4,5	−4	−3,5	−3
f(x)	−21,875	−13,609	−6,75	−1,203	3,125	6,328	8,5

x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5
f(x)	9,734	10,125	9,766	8,75	7,172	5,125	2,703

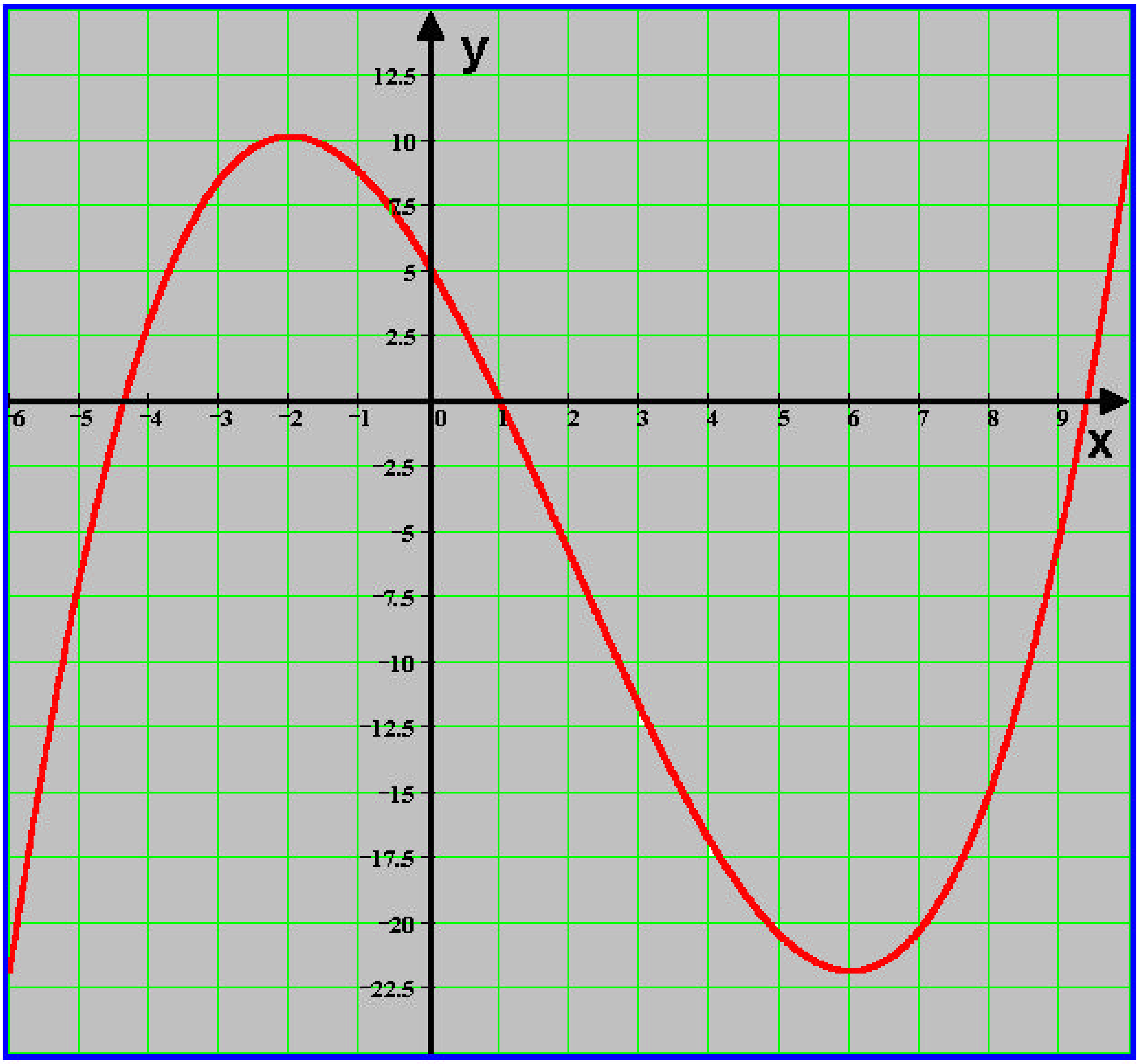
x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
f(x)	0	−2,891	−5,875	−8,859	−11,75	−14,453	−16,875

x	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
f(x)	−18,922	−20,5	−21,516	−21,876	−21,484	−20,25	−18,078

x	8	8,5	9	9,5	10
f(x)	−14,875	−10,547	−5	1,859	10,125

Aufgabe 1 a

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{8}$$



Aufgabe 1b

$$f(x) = -\frac{1}{32}x^4 + x^2 - 3\frac{1}{2}$$

Symmetrie

Weil in der Funktionsgleichung nur Terme mit geradem Exponenten vorkommen, verläuft der Graph von f symmetrisch zur y-Achse.

$$f(-x) = -\frac{1}{32}(-x)^4 + (-x)^2 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{32}x^4 + x^2 - 3\frac{1}{2} = f(x)$$

Nullstellen

$x_{01} = 1$ durch Probe.

Wegen der Achsensymmetrie liegt bei $x_{02} = -2$ eine weitere Nullstelle vor.

$(x-2)(x+2) = x^2 - 4$

$$\left(-\frac{1}{32}x^4 + x^2 - 3\frac{1}{2}\right) : (x^2 - 4) = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{7}{8}$$

$$\underline{-\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{8}x^2}$$

$$\frac{7}{8}x^2 - \frac{7}{2}$$

$$\underline{\frac{7}{8}x^2 - \frac{7}{2}}$$

$$0$$

$$-\frac{1}{32}x^2 + \frac{7}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{32}x^2 = 87 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 28 \quad \Rightarrow$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{28} = \pm 2\sqrt{7} \approx \pm 5{,}292$$

Die Nullstellen der Funktion sind: $\underline{\underline{x_{01} = 2}}$, $\underline{\underline{x_{02} = -2}}$, $\underline{\underline{x_{03} = 2\sqrt{7}}}$

und $\underline{\underline{x_{04} = -2\sqrt{7}}}$

2. Möglichkeit Die Nullstellen lassen sich auch bestimmen, indem man in der Funktionsgleichung die Substitution $z := x^2$ vornimmt.)

Schnittpunkt mit der y-Achse

$$f(0) = -3\frac{1}{2}$$

Der Graph von f schneidet die y-Achse an der Stelle $\underline{\underline{y_S = -3\frac{1}{2}}}$.

Extrempunkte

Notwendige Bdingung: $f'(x) = 0$

$f'(x) = -\frac{1}{8}x^3 + 2x$

$-\frac{1}{8}x_E^3 + 2x_E = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E1} = 0$

$-\frac{1}{8}x_E^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{8}x_E^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_E^2 = 16 \quad \Rightarrow$

$x_{E2} = 4$ und $x_{E3} = -4$

Hinreichende Bedingung: $f'(x_E) = 0$ s.o. und $f''(x_E) \neq 0$

$f''(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 2$

$f''(x_{E1}) = f''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ Minimum

$f''(x_{E2}) = f''(4) = -4 < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum

$f''(x_{E3}) = f''(-4) = -4 < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum

Funktionswerte

$f(x_{E1}) = f(0) = -3\frac{1}{2}$

$f(x_{E2}) = f(x_{E3}) = f(4) = f(-4) = 4\frac{1}{2}$

Die Funktion $f(x)$ hat im Punkt $\underline{\underline{T = (0 / -3\frac{1}{2})}}$ ein lokales Minimum.

In den Punkten $\underline{\underline{H_1 = (4 / 4\frac{1}{2})}}$ und $\underline{\underline{H_2 = (-4 / 4\frac{1}{2})}}$ liegt jeweils ein lokales Maximum vor.

Wendepunkte

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 2$

$f''(x_W) = -\frac{3}{8}x_W^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8}x_W^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_W^2 = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow$

$x_{W1} = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2{,}309$ und $x_{w2} = -\sqrt{\frac{16}{3}} \approx -2{,}309$

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x_W) \neq 0$, $f^{¶}(x_W) = 0$ s.o. und $f^{\mu\mu\mu}(x_W) \neq 0$

$$f^{\mu}(x_{w1}) = f^{\mu}(2{,}309) = -\frac{1}{8} \cdot 2{,}309^3 + 2 \cdot 2{,}309 \approx 3{,}079 \neq 0$$

$$f^{\mu}(x_{W2}) = f^{\mu}(-2{,}309) = -\frac{1}{8} \cdot (-2{,}309)^3 + 2 \cdot (-2{,}309) = -3{,}079 \neq 0$$

$$f^{\mu\mu\mu}(x) = -\frac{3}{4}\,x$$

$$f^{\mu\mu\mu}(x_{W1}) = f^{\mu\mu\mu}(2{,}309) = -\frac{3}{4} \cdot 2{,}309 = -1{,}732 \neq 0$$

$$f^{\mu\mu\mu}(x_{w2}) = f^{\mu\mu\mu}(-2{,}309) = -\frac{3}{4} \cdot (-2{,}309) = 1{,}732 \neq 0$$

Die hinreichende Bedingung für Wendepunkte ist also erfüllt.

Funktionswerte

$$f\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{1}{32}\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)^2 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{32} \cdot \frac{256}{9} + \frac{16}{3} - \frac{7}{2}$$

$$= -\frac{16}{18} + \frac{96}{18} - \frac{63}{18} = \frac{17}{18} = f\left(-\sqrt{\frac{16}{3}}\right)$$

Die Funktion f (x) hat die Wendepunkte $\underline{\underline{W_1 = (2{,}309 \;/\; 0{,}944)}}$ und $\underline{\underline{W_2 = (-2{,}309 \;/\; 0{,}944)}}$

Wertebereich

Der Wertebereich der Funktion f wird für positive Funktionswerte durch die beiden Maxima begrenzt.

Es gilt: $\underline{\underline{W(f) = \{-\ldots < f(x) \leq 4\frac{1}{2} \;/\; x \in R\}}}$

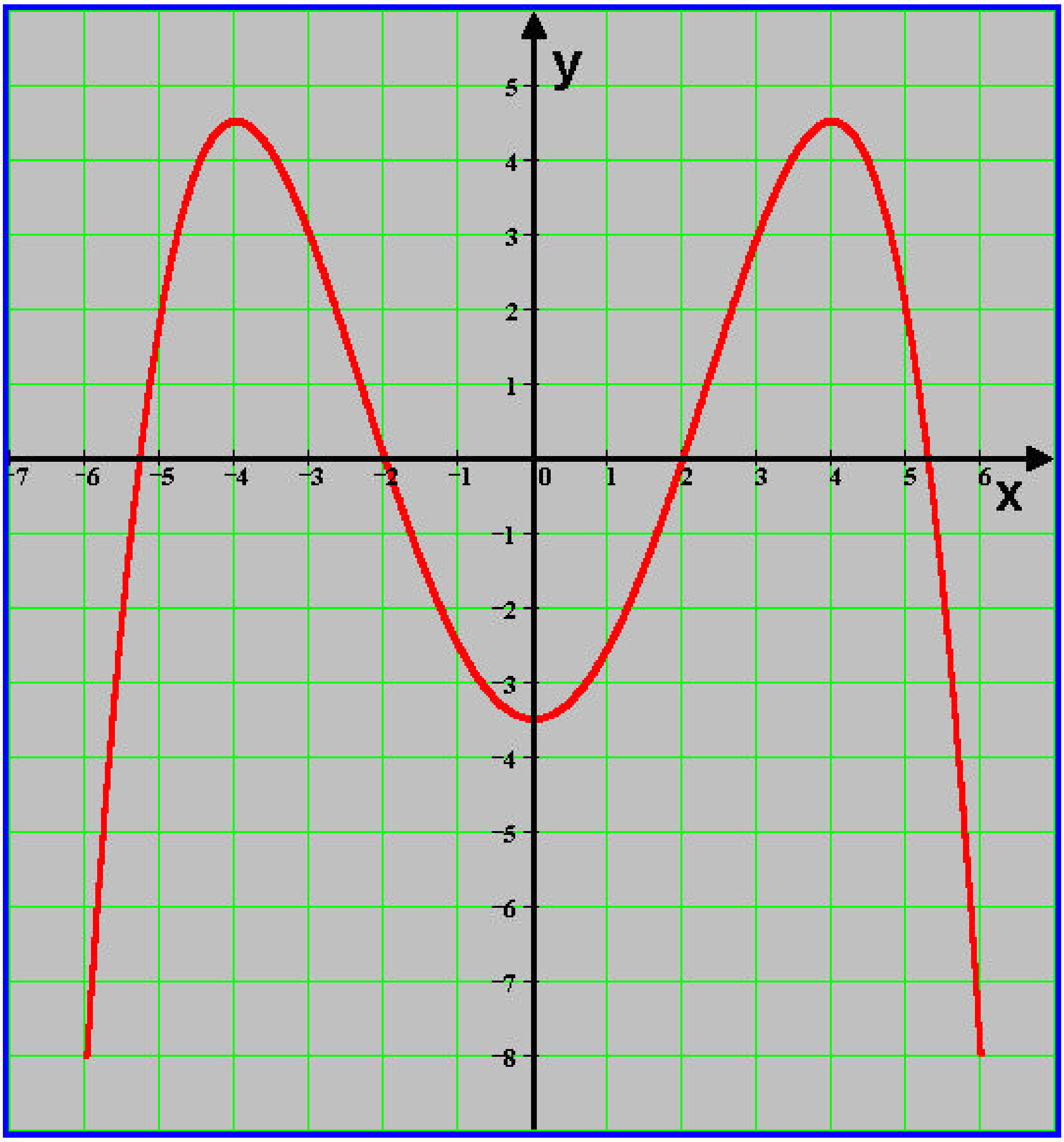
Wertetabelle

x	0	± 0,5	± 1	± 1,5	± 2	± 2,5	± 3
f(x)	−3,5	−3,252	−2,531	-1,408	0	1,529	2,969

x	± 3,5	± 4	± 4,5	± 5	± 5,5	± 6
f(x)	4,061	4,5	3,936	1,967	−1,846	−8

Aufgabe 1 b

$$f(x) = -\frac{1}{32}x^4 + x^2 - 3\frac{1}{2}$$



Aufgabe 2 a

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\quad$ $u(x)$ und $v(x)$ seien an der Stelle x differenzierbar

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

Man addiert nun zum Zähler des Differenzenquotienten den Term $u(x) \cdot v(x+h)$ hinzu und subtrahiert ihn sogleich wieder.
Durch diese "Nulladdition" läßt sich der Grenzwert des Differenzenquotienten folgendermaßen darstellen:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h)}{h}$$

Durch Ausklammern der Terme $u(x)$ und $v(x+h)$ erhält man:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\{u(x+h) - u(x)\} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \{v(x+h) - v(x)\}}{h}$$

Mit Hilfe der Grenzwertsätze folgt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\{u(x+h) - u(x)\} \cdot v(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{u(x) \cdot \{v(x+h) - v(x)\}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x+h) \right] + \lim_{h \to 0} \left[u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} v(x+h) + \lim_{h \to 0} u(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Wenn man jetzt diese vier Grenzwerte bildet erhält man die Produktregel der Differentialrechnung.

$$\mathbf{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Aufgabe 2 b

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ $\quad$ $u(x), v(x), w(x)$ seien an der Stelle x differenzierbar.

Die Produktregel für zwei differenzierbare Funktionen wurde oben bewiesen, und ihre Gültigkeit wird im folgenden vorausgesetzt

Sei $z(x) := v(x) \cdot w(x) \quad \Rightarrow \quad z'(x) = v'(x) \cdot w(x) + v(x) \cdot w'(x)$

Mit Hilfe der Funktion $z(x)$ läßt sich die Funktion $f(x)$ darstellen als

$f(x) = u(x) \cdot z(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot z(x) + u(x) \cdot z'(x) \quad (*)$

Setzt man in die Gleichung (*) für $z(x)$ das Produkt $v(x) \cdot w(x)$ ein, und ersetzt man $z^{\mu}(x)$ durch den Term $v^{\mu}(x) \cdot w(x) + v(x) \cdot w^{\mu}(x)$ so erhält man:

$$f^{\mu}(x) = u^{\mu}(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot [v^{\mu}(x) \cdot w(x) + v(x) \cdot w^{\mu}(x)]$$

$$f^{\mu}(x) = u^{\mu}(x) \cdot v(x) + w(x) + u(x) \cdot v^{\mu}(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w^{\mu}(x)$$

Sind die Funktionen u, v und w differenzierbar an der Stelle x, so ist auch die Funktion f zu $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ differenzierbar an der Stelle x und es gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{f^{\mu}(x) = u^{\mu}(x) \cdot v(x) + w(x) + u(x) \cdot v^{\mu}(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w^{\mu}(x)}}$$

Aufgabe 2 c

Sind die Funktionen $a_1(x), a_2(x), a_3(x), \ldots\ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ differenzierbar an der Stelle x, do ist auch die Funktion f zu
$f(x) = a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot a_3(x) \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-1}(x) \cdot a_n(x)$ differenzierbar an der Stelle x und es gilt:

$$f(x) = a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot a_3(x) \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-1}(x) \cdot a_n(x) \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f^{\mu}(x) = & \left[a_1^{\mu}(x) \cdot a_2(x) \cdot a_3(x) \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-1}(x) + a_n(x)\right] + \\ & \left[a_1(x) \cdot a_2^{\mu}(x) \; a_3(x) \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-1}(x) + a_n(x)\right] + \\ & \left[a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot a_3^{\mu}(x) \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-1}(x) + a_n(x)\right] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & \left[a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot a_3(x) \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-1}^{\mu}(x) + a_n(x)\right] + \\ & \left[a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot a_3(x) \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-1}(x) + a_n^{\mu}(x)\right] \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) $f(x) = 3x^2 \sin 4x$

$u(x) = 3x^2 \qquad v(x) = \sin 4x$

$u'(x) = 6x \qquad v'(x) = 4\cos 4x$

$f'(x) = 6x \sin 4x + 3x^2 \cdot 4\cos 4x$

$$\underline{\underline{f'(x) = 6x \sin 4x + 12x^2 \cos 4x = 6x(\sin 4x + 2x \cos 4x)}}$$

b) $f(x) = 7(3x^5 - 4x^3 + 2x)^{17}$

$$\underline{\underline{f'(x) = 119(3x^5 - 4x^3 + 2x)^{16} \cdot (15x^4 - 12x^2 + 2)}}$$

c) $f(x) = \cos(3x^2 - 2x)$

$f'(x) = -(6x - 2)\sin(3x^2 - 2x)$

$$\underline{\underline{f'(x) = (2 - 6x)\sin(3x^2 - 2x)}}$$

d) $f(x) = \sqrt{\tan x} = (\tan x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(\tan x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\tan x)'$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$$

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{1 + (\tan x)^2}{2\sqrt{\tan x}}}}$$

e) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{(x+1)^2}}}$$

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \underline{\underline{-\frac{4}{(x+1)^3}}}$$

$$f'''(x) = \frac{-4 \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \underline{\underline{-\frac{12}{(x+1)^4}}}$$

Aufgabe 4

Die allgemeine Funktionsgleichung einer ganzen rationalen Funktion lautet: $f(x) = a x^5 + b x^4 + c x^3 + d x^2 + e x + f_*$

Die beiden ersten Ableitungen sind:

$f'(x) = 5 a x^4 + 4 b x^3 + 3 c x^2 + 2 d x + e$ und

$f''(x) = 20 a x^3 + 12 b x^2 + 6 c x + 2 d$

Aus der Bedingung $f(0) = 0 \Rightarrow f_* = 0$

Aus der Bedingung $f'(0) = 0 \Rightarrow e = 0$

Folglich lassen sich die Funktion f(x) und ihre ersten beiden Ableitungen folgendermaßen darstellen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a x^5 + b x^4 + c x^3 + d x^2 \\
f'(x) &= 5 a x^4 + 4 b x^3 + 3 c x^2 + 2 d x \\
f''(x) &= 20 a x^3 + 12 b x^2 + 6 c x + 2 d
\end{aligned}
$$

Um die restlichen Unbekannten a, b, c, d zu ermitteln, benötigt man noch 4 weitere Bedingungen.

1) $f(2) = -20$ 2) $f(1) = -5$ 3) $f'(2) = -18$ 4) $f''(2) = 0$

Mit diesen 4 Bedingungen erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
32\,a & + & 16\,b & + & 8\,c & + & 4\,d & = & -20 & \big|\; :2 \\
a & + & b & + & c & + & d & = & -5 & \big|\; \cdot 2 \quad (***) \\
80\,a & + & 32\,b & + & 12\,c & + & 4\,d & = & -18 & \big|\; :2 \\
160\,a & + & 48\,b & + & 12\,c & + & 2\,d & = & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
16\,a & + & 8\,b & + & 4\,c & + & 2\,d & = & -10 & \big|\; (1) - (2) \\
2\,a & + & 2\,b & + & 2\,c & + & 2\,d & = & -10 & \big|\; (2) - (3) \\
40\,a & + & 16\,b & + & 6\,c & & & = & -9 & \big|\; (3) - (4) \\
160\,a & + & 48\,b & + & 12\,c & + & 2\,d & = & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
14\,a & + & 6\,b & + & 2\,c & = & 0 & \big|\; \cdot 6 \quad (**) \\
-38\,a & - & 14\,b & - & 4\,c & = & -1 & \big|\; \cdot 3 \\
120\,a & - & 32\,b & - & 6\,c & = & -9 & \big|\; \cdot 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
84\,a & + & 36\,b & + & 12\,c & = & 0 & \big|\; (1) + (2) \\
-114\,a & - & 42\,b & - & 12\,c & = & -3 & \big|\; (2) - (3) \\
-240\,a & - & 64\,b & - & 12\,c & = & -18 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrl}
-30\,a & - & 6\,b & = & -3 & \Big|\; \cdot \frac{11}{3} \quad (*) \\
126\,a & + & 22\,b & = & 15 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrl}
-110\,a & - & 22\,b & = & -11 & \Big|\; (1) + (2) \\
126\,a & + & 22\,b & = & 15 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
16\,a & = & 4 \\
a & = & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

a in $(*)$ $\quad \Rightarrow \quad 30 \cdot \frac{1}{4} - 6\,b = -3 \quad \Leftrightarrow \quad 6\,b = -3 + 7\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

$\quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{3}{4}$

a, b in $(**)$ $\quad \Rightarrow \quad 14 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 2\,c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,c = -3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 1$

$\quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2}$

a,b,c in $(***)$ $\quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + d = -5 \quad \Leftrightarrow \quad d = -5$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 5x^2}}$

$f''(x) = 5x^3 - 9x^2 + 3x - 10$

$f''(0) = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum

Die Funktion $f(x)$ hat im Koordinatenursprung ein $\underline{\underline{\text{lokales Maximum}}}$.

Aufgabe 5

Wegen der Punktsymmetrie bzgl. des Koordinatenursprungs gilt:

$f(x) = a\,x^3 + b\,x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3\,a\,x^2 + b$

Die allgemeine Parabelgleichung lautet:

$p(x) = c\,x^2 + d\,x + e \quad \Rightarrow \quad p'(x) = 2\,c\,x + d$

Um die Funktionsgleichungen von $f(x)$ und $p(x)$ zu ermitteln, muß man die 5 Unbekannten a, b, c, d, e berechnen. Dazu benötigt man 5 Bedingungen.

1) $f'(4) = 0$ 2) $p(2) = 10$ 3) $p'(2) = 0$ 4) $f(4) = p(4)$ 5) $f(-4) = p(-4)$

(zu 5) Wegen der Punktsymmetrie muß die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = -4$ ein lokales Minimum haben.)

Mit diesen 5 Bedingungen erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
(1) & 48a & + & b & & & & & = & 0 & & \\
(2) & & & & 4c & + & 2d & + e & = & 10 & & \\
(3) & & & & 4c & + & d & & = & 0 & & \\
(4) & 64a & + & 4b & & & & & = & 16c & + 4d & + e \\
(5) & -64a & - & 4b & & & & & = & 16c & - 4d & + e
\end{array}
$$

Durch Addition von (4) und (5) erhält man:

$0 = 32c + 2e \iff 2e = -32c \iff e = -16c$ in (2) und (3) ergibt:

$$
\begin{array}{llllll}
4c & + 2d & - 16c & = & 10 & \mid :2 \\
4c & + d & & = & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
-6c & + d & = & 5 & \\
4c & + d & = & 0 & (*)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
-10c & = & 5 \\
c & = & -\frac{1}{2} \quad \text{mit } (*) \Rightarrow d = 2
\end{array}
$$

Einsetzen von c und d in (2) ergibt:

$4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 2 + e = 10 \iff 2 + e = 10 \iff e = 8$

Durch Einsetzen von c, d, e in (1) und (4) erhält man:

$$
\begin{array}{lllll}
48a & + b & = & 0 & \\
64a & + 4b & = & -8 - 8 + 8 = -8 & \mid :4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
48a & + b & = & 0 \\
16a & + b & = & -2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
32a & = & -2 \\
a & = & -\frac{1}{16} \quad \text{in (1)} \Rightarrow \\
48 \cdot (-\frac{1}{16}) + b & = & 0 \quad \iff \quad b = 3
\end{array}
$$

Die gesuchten Funktionsgleichungen lauten: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + 3x}}$ und

$\underline{\underline{p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 8}}$

Bestimmung der Koordinaten für den Hochpunkt und den Tiefpunkt

$$p(4) = -\frac{1}{2} \cdot 16 + 8 + 8 = 8 = f(4)$$

$$p(-4) = -\frac{1}{2} \cdot 16 - 8 + 8 = -8 = f(-4)$$

Die beiden Extrempunkte haben die Koordinaten:

$$\underline{\underline{P_{Max} = (-4\,/8)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{P_{Min} = (-4\,/-8)}}$$