Aufgabe zum Thema: Gebrochen - rationale Funktionen

Eine gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ hat als Zählerfunktion $Z(x)$ eine lineare Funktion und als Nennerfunktion $N(x)$ eine ganz-rationale Funktion zweiten Grades.
Der Graph der gebrochenen-rationalen Funktion f verläuft symmetrisch zum Koordinatenursprung. Die Funktion f hat an der Stelle $x_{w1} = 8\sqrt{3}$ einen Wendepunkt. Außerdem verläuft der Graph von f durch den Punkt $P = (10 / 1\tfrac{51}{164})$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f, und zwar so, dass in ihr als Koeffizienten nur natürliche Zahlen vorkommen, die so klein wie möglich gewählt werden sollen.

b) Weisen Sie nach, dass an der Stelle $x_{w1} = 8\sqrt{3}$ tatsächlich eine Wendestelle vorliegt, und bestimmen Sie die vollständigen Koordinaten des Wendepunktes.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Wendepunkte.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Extrempunkte der Funktion f.
Handelt es sich dabei um absolute Extremwerte ?

e) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

f) Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

g) Bestimmen Sie den Verlauf des Funktionsgraphen für $x \to \pm\infty$.

h) Fertigen Sie eine Wertetabelle an und zeichnen Sie den Verlauf des Funktionsgraphen im Bereich $-55 \leq x \leq 55$.

L ö s u n g e n

a) Eine gebrochen-rationale Funktion f kann nur dann symmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs sein, wenn die Gleichung für die Zählerfunktion nur Terme mit ungeraden Exponenten und die Gleichung für die Nennerfunktion nur Terme mit geraden Exponenten enthält oder umgekehrt.
In dieser Aufgabenstellung ist durch den Grad von Zähler- und Nennerfunktion festgelegt, dass die Zählerfunktion nur Terme mit ungeraden und die Nennerfunktion nur Terme mit geraden Exponenten hat.
Die gebrochen-rationale Funktion f und ihre ersten beiden Ableitungen lassen sich also folgendermaßen darstellen.

$$f(x) = \frac{a\,x}{b\,x^2 + c}$$

$$f'(x) = \frac{a\,(b\,x^2 + c) - a\,x \cdot 2\,b\,x}{(b\,x^2 + c)^2} = \frac{a\,b\,x^2 + a\,c - 2\,a\,b\,x^2}{(b\,x^2 + c)^2} = \frac{-\,a\,b\,x^2 + a\,c}{(b\,x^2 + c)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2\,a\,b\,x\,(b\,x^2 + c)^2 - (-a\,b\,x^2 + a\,c) \cdot 2\,(b\,x^2 + c) \cdot 2\,b\,x}{(b\,x^2 + c)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2\,a\,b\,x\,(b\,x^2 + c) - 4\,b\,x\,(a\,c - a\,b\,x^2)}{(b\,x^2 + c)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2\,a\,b^2\,x^3 - 2\,a\,b\,c\,x - 4\,a\,b\,c\,x + 4\,a\,b^2\,x^3}{(b\,x^2 + c)^3} = \frac{2\,a\,b^2\,x^3 - 6\,a\,b\,c\,x}{(b\,x^2 + c)^3}$$

<u>Bedingungen:</u>

1) $f(10) = 1\frac{51}{164} = \frac{215}{164}$ und 2) $f''(8\sqrt{3}) = f''(\sqrt{192}) = 0$

<u>Gleichungen</u>

(1) $\frac{10\,a}{100\,b + c} = \frac{215}{164}$ (2) $2\,a\,b^2 \cdot 192 \cdot \sqrt{192} - 6\,a\,b\,c\sqrt{192} = 0$

Dividiert man Gleichung (2) durch $(2\sqrt{192}\;a\,b)$ so erhält man:

$192\,b - 3\,c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\,c = -192\,b \quad \Leftrightarrow \quad c = 64\,b$

Einsetzen in (1) ergibt:

$\frac{10\,a}{164\,b} = \frac{215}{164} \quad \Leftrightarrow \quad 10\,a = 215\,b \quad \Leftrightarrow \quad a = 21{,}5\,b$

Fortsetzung von Aufgabenteil a)

Zur Lösung des Gleichungssystems kann man eine Variable frei wählen.
Um für die Variablen möglichst kleine natürliche Zahlen zu erhalten,
wähle ich $b = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 43$ und $c = 128$.

Die gesuchte Funktionsgleichung für die ganz-rationale Funktion lautet:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{43\,x}{2\,x^2 + 128}}}$$

b) Die ersten drei Ableitungen der Funktion f (x) lauten:

$$f'(x) = \frac{-43 \cdot 2\,x^3 + 43 \cdot 128}{(2\,x^2 + 128)^2} = \frac{-86\,x^2 + 5504}{(2\,x^2 + 128)^2} := \frac{a(x)}{b(x)}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 43 \cdot 2^2\,x^3 - 6 \cdot 43 \cdot 2 \cdot 128\,x}{(2\,x^2 + 128)^3} = \frac{344\,x^3 - 66048\,x}{(2\,x^2 + 128)^3} := \frac{c(x)}{d(x)}$$

$$f'''(x) =$$

$$\frac{(3 \cdot 344\,x^2 - 66048)(2\,x^2 + 128)^3 - (344\,x^3 - 66048\,x) \cdot 3 \cdot (2\,x^2 + 128)^2 \cdot 4\,x}{(2\,x^2 + 128)^6} =$$

$$\frac{(1032\,x^2 - 66048)(2\,x^2 + 128) - 12\,x\,(344\,x^3 - 66048\,x)}{(2\,x^2 + 128)^4} =$$

$$\frac{2064\,x^4 - 4128\,x^4 + 792576\,x^2 - 8454144}{(2\,x^2 + 128)^4}$$

<u>Nachweis, dass für $x_w = 8\sqrt{3}$ ein Wendepunkt vorliegt</u>

<u>Notwendige Bedingung:</u> $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{c(x)}{d(x)}$$

$$a(x_{w1}) = a(\sqrt{192}) = 344 \cdot 192 \cdot \sqrt{192} - 66048 \cdot \sqrt{192} = 66048 \cdot \sqrt{192} - 66048 \cdot \sqrt{192} = 0$$

$$b(x_{w1}) = b(\sqrt{192}) = (2 \cdot 192 + 128)^3 = 134217728 \neq 0 \qquad \Rightarrow \quad f''(x_{w1}) = 0$$

Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist also erfüllt.

Fortsetzung von Aufgabenteil b)

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x) \neq 0$, $f^{\P}(x) = 0$ s.o. und $f^{\mu\mu\mu}(x) \neq 0$

$$f^{\mu}(x_{w1}) = f^{\mu}(\sqrt{192}) = \frac{-86 \cdot 192 + 5504}{(2 \cdot 192 + 128)^2} = \frac{-11008}{512^2} = -\frac{11008}{262144} \approx -0{,}041992 \neq 0$$

$$f^{\mu\mu\mu}(x_{w1}) = f^{\mu\mu\mu}(\sqrt{192}) = \frac{2064 \cdot 192^2 - 4128 \cdot 192 \cdot \sqrt{192} + 792576 \cdot \sqrt{192} - 8454144}{(2 \cdot 192 + 128)^4}$$

$$= \frac{76087296 - 8454144}{512^4} = \frac{67633152}{68719476736} = \frac{129}{131072} \approx 0{,}00098419 \neq 0$$

Die hinreichende Bedingung für eine Wendestelle ist also erfüllt.

Funktionswert

$$f(x_{w1}) = \frac{43 \cdot 8 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 192 + 128} = \frac{344\sqrt{3}}{512} = \frac{43}{64} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}164$$

Die Funktion f hat den Wendepunkt $\underline{\underline{W_1 = (8\sqrt{3} \,/\, \frac{43}{64}\sqrt{3}) \approx (13{,}856 \,/\, 1{,}164)}}$

c) Da die Funktion f symmetrisch zum Koordinatenursprung ist, muß es aus Symmetriegründen einen weiteren Wendepunkt mit den Koordinaten $\underline{\underline{W_2 = (-8\sqrt{3} \,/ -\frac{43}{64}\sqrt{3}) \approx (-13{,}856 \,/\, -1{,}164)}}$ geben.

Die Zählerfunktion der zweiten Ableitung $c(x)$ hat also die Nullstellen $x_{w1} = 8\sqrt{3}$ und $x_{w2} = -8\sqrt{3}$. Da diese Zählerfunktion keinen konstanten Term enthält ist $x_{w3} = 0$ eine weitere Nullstelle. Mehr als diese drei Nullstellen kann es nicht geben, weil $c(x)$ eine ganz-rationale Funktion dritten Grades ist.

Für die Nennerfunktion $d(x)$ der zweiten Ableitung gilt: $b(0) = 128^3 = 2097152 \neq 0$
Daraus ergibt sich: $f^{\P}(0) = 0$.

Die notwendige Bedingung für eine dritte Wendestelle ist für $x_{w3} = 0$ also erfüllt.

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x) \neq 0$, $f^{\P}(x) = 0$ s.o. und $f^{\mu\mu\mu}(x) \neq 0$

$$f^{\mu}(0) = \frac{5504}{128^2} = \frac{5504}{16384} = \frac{43}{128} \approx 3{,}3359 \neq 0$$

$$f^{\mu\mu\mu}(0) = -\frac{8454144}{128^4} = -\frac{8454144}{268435456} = -\frac{129}{4096} \approx 0{,}03149 \neq 0$$

Die hinreichende Bedingung für eine Wendestelle ist also erfüllt.

Fortsetzung von Aufgabenteil c)

Funktionswert

$$f(0) = \frac{43 \cdot 0}{128} = 0$$

Der dritte Wendepunkt der Funktion liegt im Koordinatenursprung, d.h.

$$\underline{\underline{W_3 = (0 / 0)}}$$

d) Extrempunkte

Notwendige Bedingung: $f^{\mu}(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = 0$

$$a(x_E) = -86\, x_E^2 + 5504 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 86\, x_E^2 = 5504 \quad \Leftrightarrow \quad x_E^2 = 64 \quad \Rightarrow$$

$x_{E1} = 8$ und $x_{E2} = -8$

$$b(8) = (2 \cdot 8^2 + 128)^2 = 65536 \neq 0 \qquad b(-8) = \{2 \cdot (-8)^2 + 128\}^2 = 65536 \neq 0$$

Es gilt also $f^{\mu}(x_{E1}) = f^{\mu}(8) = 0$ und $f^{\mu}(x_{E2}) = f^{\mu}(-8) = 0$

Die notwendige Bedingung ist also erfüllt.

Hinreichende Bedingung: $f^{\mu}(x) = 0$ s.o. und $f^{\P}(x) \neq 0$

$$f^{\P}(x_{E1}) = f^{\P}(8) = \frac{344 \cdot 8^3 - 66048 \cdot 8}{(2 \cdot 8^2 + 128)^3} = -\frac{352256}{16777216}$$

$$= -\frac{43}{2048} \approx -0{,}02996 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Maximum}$$

$$f^{\P}(x_{E2}) = f^{\P}(-8) = \frac{344 \cdot (-8)^3 - 66048 \cdot (-8)}{\{2 \cdot (-8)^2 + 128\}^3} = \frac{352256}{16777216}$$

$$= \frac{43}{2048} \approx 0{,}02996 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Minimum}$$

Funktionswerte

$$f(8) = \frac{43 \cdot 8}{2 \cdot 8^2 + 128} = \frac{344}{256} = \frac{43}{32} = 1\frac{11}{32} = 1{,}34375$$

Wegen der Punktsymmetrie gilt: $f(-8) = -1\frac{11}{32} = -1{,}34375$

Die Funktion $f(x)$ hat im Punkt $\underline{\underline{E_1 = (8 / 1{,}34375)}}$ ein Maximum und im Punkt

$\underline{\underline{E_2 = (-8 / -1{,}34375)}}$ ein Minimum.

Fortsetzung von Aufgabenteil d)

Es handelt sich bei diesen beiden Extremwerten um ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum, weil die Funktion f diese Werte niemals über- bzw. unterschreitet. (S. Zeichnung)

e) Definitionsbereich

$f(x) = \dfrac{43\,x}{2\,x^2 + 128}$ Durch Nullsetzen der Nennerfunktion erhält man:

$2\,x^2 + 128 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x^2 = -128 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -64$ nicht lösbar in R

Da der Nenner der gebrochen-rationalen Funktion nie den wert Null annimmt, ist die Funktion f für alle reellen zahlen definiert; d.h. $D(f) = \mathbb{R}$.

f) Der Wertebereich von f ist durch das Maximum und das Minimum festgelegt. (S. Zeichnung) Für den Wertebereich der Funktion gilt:

$W(f) = \{-1{,}34375 \le f(x) \le 1{,}34375 \;/\; f(x) \in \mathbb{R}\}$

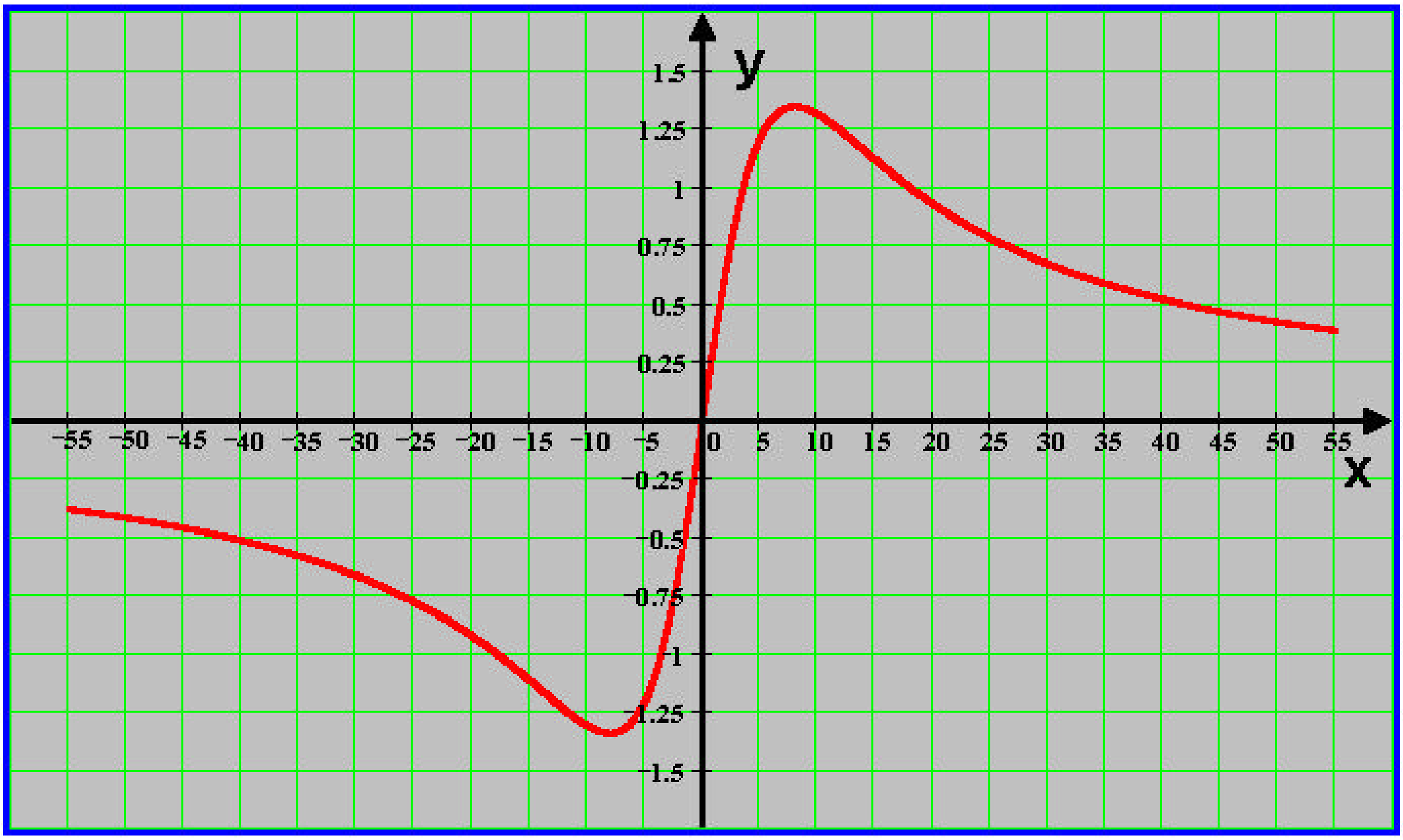
g) Da der Grad der Zählerfunktion kleiner als der Grad der Nennerfunktion ist, nähert sich der Graph für $x \to \pm\infty$ der x-Achse beliebig dicht an.
Es gilt also: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ Die x-Achse ist Asymptotenfunktion bzgl. f.

Für $x \to +\infty$ sind die x-Werte positiv. Der Graph nähert sich der x-Achse von oben. (Verlauf im ersten Quadranten des Koordinatensystems)

Für $x \to -\infty$ sind die x-Werte negativ. Der Graph nähert sich der x-Achse von unten. (Verlauf im dritten Quadranten des Koordinatensystems)

h)

$$f(x) = \frac{43x}{2x^2 + 128}$$



W e r t e t a b e l l e

x	− 55	− 50	− 45	− 40	− 35	− 30	− 25	− 20
f (x)	− 0,383	− 0,419	− 0,463	− 0,517	− 0,584	− 0,669	− 0,78	− 0,927

x	− 15	$-8\sqrt{3}$	− 10	− 8	− 5	− 2,5	0
f (x)	− 1,116	− 1,164	− 1,311	− 1,344	− 1,208	− 0,765	0

x	2,5	5	8	10	$8\sqrt{3}$	15	20
f (x)	0,765	1,208	1,344	1,311	1,164	1,116	0,927

x	25	30	35	40	45	50	55
f (x)	0,78	0,669	0,584	0,517	0,463	0,419	0,383