Ü b u n g s a u f g a b e

Gegeben sind die drei Funktionen

$$f_a(x) = \sqrt{a\,x} \quad h_a(x) = \frac{a^3}{x^2} \quad \text{und} \quad g_a(x) = \frac{7}{8}x - 1\frac{1}{2}a \quad a \text{ Î } R^{>0}$$

a) Stellen Sie die Gleichungen der drei Funktionen für a = 4 auf.
Berechnen Sie den Schnittpunkt A der Funktionsgraphen von f_4 und h_4, so wie den Schnittpunkt C der Funktionsgraphen von f_4 und g_4.

b) Stellen Sie für jede Funktion eine Wertetabelle auf (Funktionswerte auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet), und zeichnen Sie die drei Funktionsgraphen im Bereich $2 \leq x \leq 18$ in ein Koordinatensystem.
Verwenden Sie den Maßstab: 1 LE j 0,75 cm
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes B der Graphen von h_4 und g_4 aus der Zeichnung bzw. aus der Wertetabelle.

c) Die Graphen der drei Funktionen f_4, h_4 und g_4 umranden eine Fläche F_4.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt von dieser Fläche F_4.

d) Weisen Sie nach, dass die Schnittpunkte A, B, C der Funktionsgraphen für beliebiges $a \in R^{>0}$ die Koordinaten A = (a / a), B = (2 a / $\frac{1}{4}$ a) und C = (4 a / 2 a) haben.

e) Bestimmen Sie $a \in R^{>0}$ so, dass die Fläche F_a, die von den Graphen der Funktionen f_a, h_a und g_a umrandet wird, den Flächeninhalt F_a = 276 FE hat.

f) Wie groß ist $a \in R^{>0}$ zu wählen, damit das Dreieck ABC den Flächeninhalt F_Δ = 104 FE hat.
Zeichnen Sie ein solches Dreieck in die Planfigur von Aufgabenteil b) ein.

L ö s u n g e n

a) Die Funktionsgleichungen für a = 4 lauten:

$$\underline{\underline{f_4(x) \; = \; \sqrt{4\,x} \; = \; 2\sqrt{x}}}\,, \quad \underline{\underline{h_4(x) \; = \; \frac{64}{x^2}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{g_4(x) \; = \; \frac{7}{8}\,x - 6}}\,.$$

Schnittpunkt A

$$f_4(x) \; = \; h_4(x)$$

$$\sqrt{4\,x} \; = \; \frac{64}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 4\,x \; = \; \frac{4096}{x^4} \quad \Leftrightarrow \quad 4\,x^5 \; = \; 4096 \quad \Leftrightarrow \quad x \; = \; 4$$

Probe: $\sqrt{4 \cdot 4} \; = \; \dfrac{64}{4^2} \quad \Rightarrow \quad 4 \; = \; 4$

Funktionswerte: $f_4(4) \; = \; h_4(4) \; = \; 4$

Die Graphen von f_4 und g_4 schneiden sich im Punkt $\underline{\underline{A = (4\,/\,4)}}$

Schnittpunkt C

$$\begin{aligned}
f_4(x) \; &= \; g_4(x) \\
\sqrt{4\,x} \; &= \; \frac{7}{8}\,x - 6 \\
4\,x \; &= \; \frac{49}{64}\,x^2 - \frac{21}{2}\,x + 36 \\
x^2 - \frac{928}{49}\,x \; &= \; -\frac{2304}{49} \\
x^2 - \frac{928}{49}\,x + \frac{215296}{2401} \; &= \; \frac{102400}{2401} \\
x - \frac{469}{49} \; &= \; \pm\,\frac{320}{49} \\
x_1 \; &= \; 16 \\
x_2 \; &= \; 1\frac{5}{7}
\end{aligned}$$

Probe

$$\sqrt{4 \cdot 16} \; = \; \frac{7}{8} \cdot 16 - 6 \quad \Rightarrow \quad 8 \; = \; 8 \; (\qquad \text{(wahr)}$$

$$\sqrt{4 \cdot \frac{12}{7}} \; = \; \frac{7}{8} \cdot \frac{12}{7} - 6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{48}{7}} \; = \; -4\frac{1}{2} \qquad \text{(falsch)}$$

Fortsetzung von Aufgabenteil a)

Aus der Probe folgt, dass nur $x_1 = 16$ eine Schnittpunktkoordinate ist.

Es gilt: $f_4(16) = g_4(16) = 8$

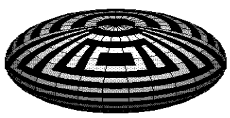
Die Graphen der Funktionen $f_4(x)$ und $g_4(x)$ schneiden sich im Punkt

$C = (16 / 18)$

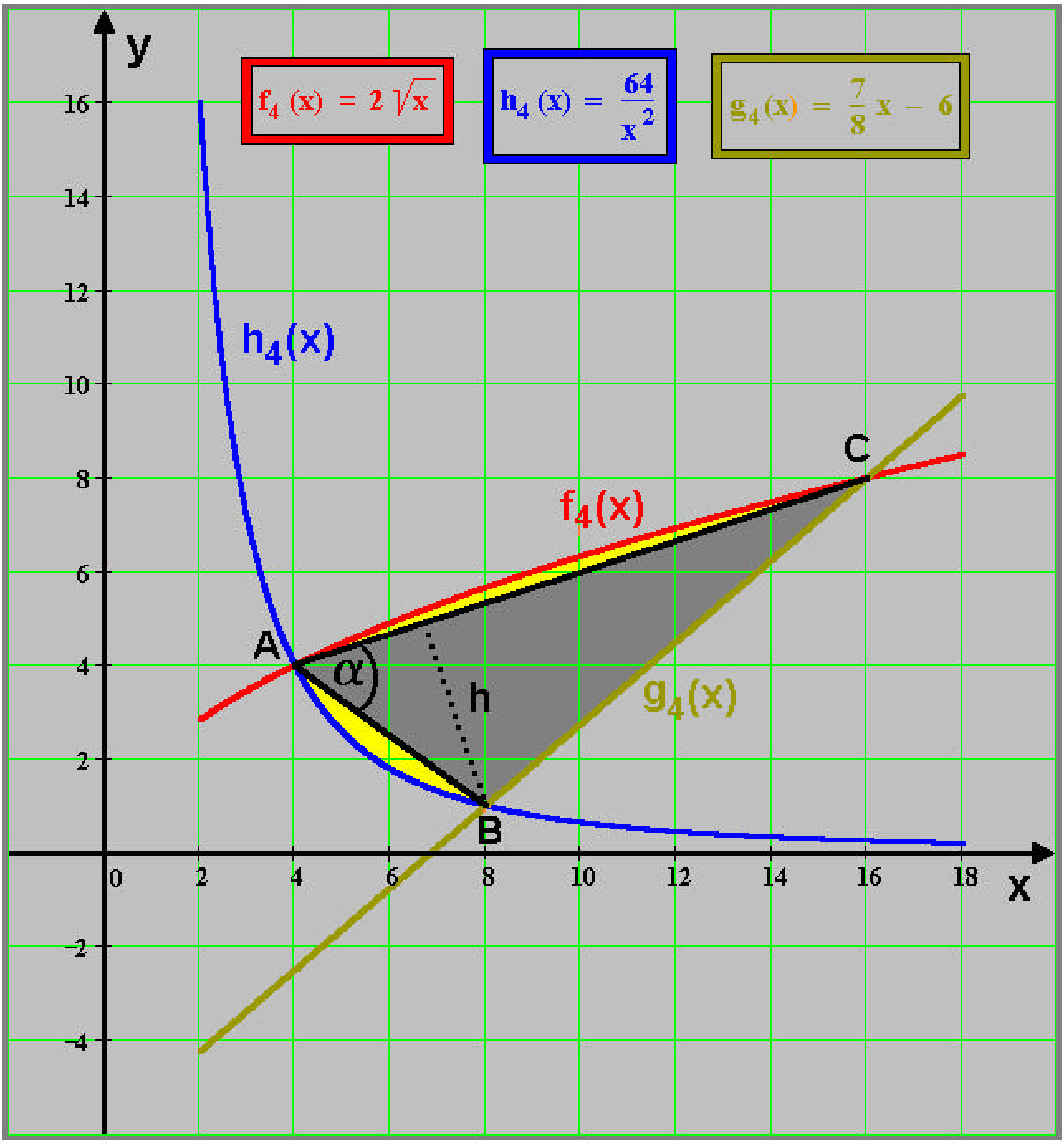
b) Wertetabellen

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbf{f_4(x)}$	2,82	3,46	4	4,47	4,89	5,29	5,66	6	6,32
$\mathbf{h_4(x)}$	16	7,11	4	2,56	1,78	1,31	1	0,79	0,64
$\mathbf{g_4(x)}$	−4,25	−3,38	−2,5	−1,63	−0,75	0,13	1	1,88	2,75

x	11	12	13	14	15	16	17	18
$\mathbf{f_4(x)}$	6,63	6,92	7,21	7,48	7,75	8	8,25	8,49
$\mathbf{h_4(x)}$	0,53	0,44	0,38	0,32	0,28	0,25	0,22	0,20
$\mathbf{g_4(x)}$	3,63	4,50	5,38	6,25	7,13	8	8,88	9,75



Graphik zu Aufgabenteil b)



c) $F_4 = \int_4^8 \left[f_4(x) - h_4(x)\right] dx + \int_8^{16} \left[f_4(x) - g_4(x)\right] dx$

$$\int_4^8 \left[f_4(x) - h_4(x)\right] dx = \int_4^8 \left[2\sqrt{x} - \frac{64}{x^2}\right] dx = \int_4^8 \left[2\,x^{\frac{1}{2}} - 64\,x^{-2}\right] dx =$$

$$\left[\frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + 64\,x^{-1}\right]\Bigg|_4^8 = \frac{4}{3}\cdot 8^{\frac{3}{2}} + \frac{64}{8} - \frac{4}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{64}{4} =$$

$$\frac{64}{3}\cdot\sqrt{2} + 8 - \frac{32}{3} - 16 = \underline{21\tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2} - 18\tfrac{2}{3}}$$

$$\int_8^{16} \left[f_4(x) - g_4(x)\right] dx = \int_8^{16} \left[2\,x^{-\frac{1}{2}} - \frac{7}{8}\,x + 6\right] dx = \left[\frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{16}\,x^2 + 6\,x\right]\Bigg|_8^{16} =$$

$$\frac{4}{3}\cdot 16^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{16}\cdot 16^2 + 6\cdot 16 - \frac{4}{3}\cdot 8^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{16}\cdot 8^2 - 6\cdot 8 =$$

$$\frac{256}{3} - 112 + 96 - 21\tfrac{1}{3}\sqrt{2} + 28 - 48 = \underline{-21\tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2} + 49\tfrac{1}{3}}$$

$$F_4 = 21\tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2} - 18\tfrac{2}{3} - 21\tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2} + 49\,\tfrac{1}{3} = 30\tfrac{2}{3}$$

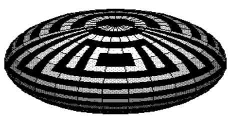
Der Flächeninhalt der von den drei Funktionsgraphen umrandeten Fläche beträgt

$\underline{\underline{F_4 = 30\tfrac{2}{3}\ \text{FE}}}$

d) Schnittpunkt $A = (a\,/a)$

Zu zeigen: $f_a(a) = h_a(a) = a$

Es gilt: $f_a(a) = \sqrt{a\cdot a} = a$ und $h_a(a) = \dfrac{a^3}{a^2} = a$ q.e.d.



Schnittpunkt $B = (2a \,/\, \frac{1}{4} a)$

Zu zeigen: $h_a(2a) = g_a(2a) = \frac{1}{4} a$

Es gilt: $h_a(2a) = \frac{a^3}{(2a)^2} = \frac{a^3}{4a^2} = \frac{1}{4} a$ und

$$g_a(2a) = \frac{7}{8} \cdot 2a - \frac{3}{2} a = \frac{14}{8} a - \frac{12}{8} a = \frac{2}{8} a = \frac{1}{4} a \quad \text{q.e.d.}$$

Schnittpunkt $C = (4a \,/\, 2a)$

Zu zeigen: $f_a(4a) = g_a(4a) = 2a$

Es gilt: $f_a(4a) = \sqrt{a \cdot 4a} = \sqrt{4a^2} = 2a$

$$g_a(4a) = \frac{7}{8} \cdot 4a - 1\frac{1}{2} a = \frac{28}{8} a - \frac{12}{8} a = \frac{16}{8} a = 2a \quad \text{q.e.d.}$$

e) $$\mathbf{F_a = \int_a^{2a} \left[f_a(x) - h_a(x) \right] dx + \int_{2a}^{4a} \left[f_a(x) - g_a(x) \right] dx}$$

$$\int_a^{2a} \left[f_a(x) - h_a(x) \right] dx = \int_a^{2a} \left[\sqrt{a x} - \frac{a^3}{x^2} \right] dx = \int_0^{2a} \left[a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^3 x^{-2} \right] dx =$$

$$\left[\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + a^3 x^{-1} \right] \Bigg|_a^{2a} = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} + a^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^{-1} - \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} - a^3 \cdot a^{-1} =$$

$$\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot a^2 + \frac{1}{2} a^2 - \frac{2}{3} a^2 - a^2 = \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} - 1\frac{1}{6} \right) a^2 = \underline{\left(1\frac{1}{3} \sqrt{2} - 1\frac{1}{6} \right) a^2}$$

$$\int_{2a}^{4a} \left[f_a(x) - g_a(x) \right] dx = \int_{2a}^{4a} \left[a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{7}{8} x + \frac{3}{2} a \right] dx = \left[\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{16} x^2 + \frac{3}{2} a x \right] \Bigg|_{2a}^{4a} =$$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{16} \cdot 16 a^2 + \frac{3}{2} a \cdot 4a - \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{16} \cdot 4 a^2 - \frac{3}{2} a \cdot 2a =$$

$$\frac{16}{3} a^2 - 7a^2 + 6a^2 - \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}\, a^2 + \frac{7}{4} a^2 - 3a^2 = \underline{\left(-1\frac{1}{3} \sqrt{2} + 3\frac{1}{12} \right) a^2}$$

Fortsetzung von Aufgabenteil e)

$$F_a = \left(1\frac{1}{3}\sqrt{2} - 1\frac{1}{6}\right)a^2 + \left(-1\frac{1}{3}\sqrt{2} + 3\frac{1}{12}\,a^2\right) = 1\frac{11}{12}\,a^2$$

$$1\frac{11}{12}\,a^2 = 276 \quad\Leftrightarrow\quad a^2 = 144 \quad\Rightarrow\quad a = 12$$

Für $\underline{\underline{a = 12}}$ hat die Fläche F_a den Flächeninhalt 276 FE.

f) $$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + \frac{3}{4}\,a^2} = \sqrt{\frac{25}{16}\,a^2} = \frac{5}{4}\,a$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3\,a)^2 + a^2} = \sqrt{10\,a^2} = a\sqrt{10}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2\,a)^2 + (\frac{7}{4}\,a)^2} = \sqrt{4\,a^2 + \frac{49}{16}\,a^2} = \sqrt{\frac{113}{16}\,a^2} = \frac{1}{4}\,a\sqrt{113}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\;\overline{AC}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{-2\,\overline{AB}\;\overline{AC}} = \frac{\frac{113}{16} - \frac{35}{16} - 10}{-\frac{10}{4}\sqrt{10}} = 0{,}56921$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 55{,}304846°$$

$$h = \overline{AB}\sin\alpha = \frac{5}{4}\,a\sin\alpha = 1{,}0277402\,a$$

$$F_\Delta = \frac{1}{2}\,h\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot 1{,}0277402\,a\cdot a\cdot\sqrt{10} = 1{,}625\,a^2$$

$$1{,}6025\,a^2 = 104 \quad\Leftrightarrow\quad a^2 = 64 \quad\Rightarrow\quad a = 8$$

Für $\underline{\underline{a = 8}}$ hat das Dreieck ABC den Flächeninhalt 104 FE.