Ü b u n g s a u f g a b e

Die Graphen der Funktionen

$$f_K(x) = -\frac{1}{K^2}x^3 + K \quad \text{und} \quad g_K(x) = \frac{1}{K^2}x^3 + K \quad \text{mit } K\ \text{Î}\ R^{>0}$$

umranden mit der x-Achse eine Fläche A_K.

a) Bestimmen Sie die Schnittstellen von f_{16} und g_{16} mit der x-Achse, so wie den gemeinsamen Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen.

b) Fertigen Sie eine Wertetabelle an, und zeichnen Sie die Fläche, die von den Graphen von f_{16}, g_{16} und der x-Achse umrandet wird, in ein Koordinatensystem ein. (Maßstab: 1 LE j 0,5 cm)

c) In die Fläche A_{16}, die die Graphen der beiden Funktionen mit der x-Achse bilden, ist ein Fünfeck so einzubeschreiben, dass sein Flächeninhalt F maximal ist. Das Fünfeck soll symmetrisch zur y-Achse sein.
Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Fünfecks.

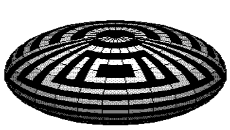
d) Berechnen Sie für allgemeines $K \in R^{>0}$ das Volumen des Rotationskörpers, den man erhält, wenn die Fläche A_K um die x-Achse rotiert.

e) Welches Volumen erhält man für K = 7 ?

f) Berechnen Sie für allgemeines $K \in R^{>0}$ den Flächeninhalt der Fläche A_K.

g) Für welches $K \in R^{>0}$ stimmt die Maßzahl der Fläche A_K mit der Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers überein, der durch Rotation von A_K um die x-Achse entsteht ?

h) Zeigen Sie, dass für beliebiges $K \in R^{>0}$ die Fläche F_{max} des achsensymmetrischen Fünfecks mit maximalem Flächeninhalt die Fläche A_K zu 92,3 % ausfüllt.



L ö s u n g

a) $\mathbf{f_{16}(x) = -\frac{1}{256}x^3 + 16}$ $\mathbf{g_{16}(x) = \frac{1}{256}x^3 + 16}$

Berechnung der Schnittstellen mit der x-Achse

$f_{16}(x) = 0$

$-\frac{1}{256}x^3 + 16 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{256}x^3 = 16 \quad\Leftrightarrow\quad x^3 = 4096 \quad\Leftrightarrow\quad x = 16$

$g_{16}(x) = 0$

$\frac{1}{256}x^3 + 16 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{256}x^3 = -16 \quad\Leftrightarrow\quad x^3 = -4096 \quad\Leftrightarrow\quad x = -16$

Berechnung des gemeinsamen Schnittpunktes

$f_{16}(x) = g_{16}(x)$

$-\frac{1}{256}x^3 + 16 = \frac{1}{256}x^3 + 16 \Leftrightarrow -\frac{1}{256}x^3 = \frac{1}{256}x^3 \Leftrightarrow -x^3 = x^3 \Leftrightarrow x = 0$

Der Graph von f_{16} schneidet die x-Achse an der Stelle $\underline{\underline{x = 16}}$; der Graph von g_{16} schneidet die x-Achse an der Stelle $\underline{\underline{x = -16}}$.

Die Graphen haben den gemeinsamen Schnittpunkt $\underline{\underline{S = (0 / 16)}}$

b) **Wertetabellen**

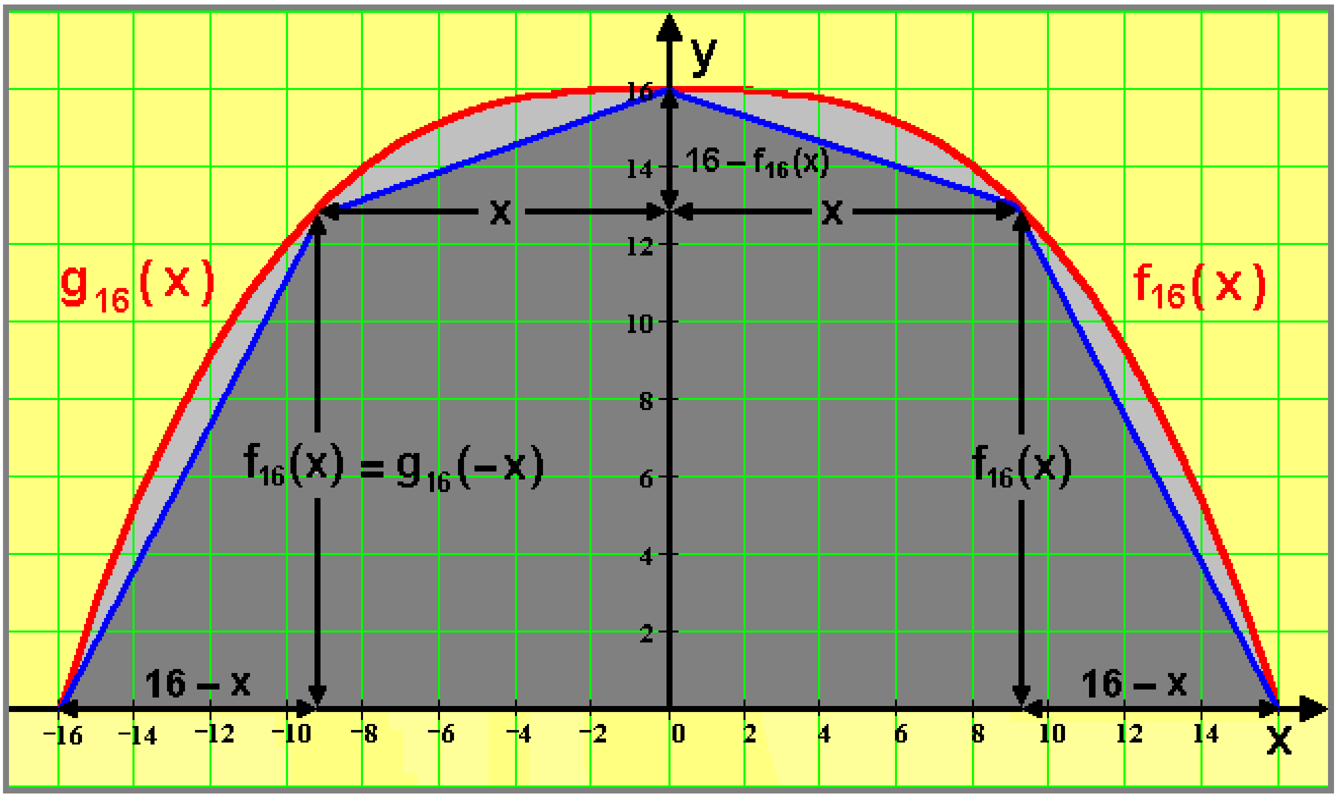
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{f_{16}(x)}$	16	15,996	15,969	15,895	15,75	15,512	15,156	14,66	14

x	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathbf{f_{16}(x)}$	13,152	12,094	10,801	9,25	7,418	5,281	2,816	0

x	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8
$\mathbf{g_{16}(x)}$	16	15,996	15,969	15,895	15,75	15,512	15,156	14,66	14

x	−9	−10	−11	−12	−13	−14	−15	−16
$\mathbf{g_{16}(x)}$	13,152	12,094	10,801	9,25	7,418	5,281	2,816	0

Graphik zu Aufgabenteil b)



c) $F(x) = 2\,\{x\,f_{16}(x) + \frac{1}{2}(16 - x)\,f_{16}(x) + \frac{1}{2}\,x\,[16 - f_{16}(x)]\}$

$= 2\,x\,f_{16}(x) + (16 - x)\,f_{16}(x) + x\,[16 - f_{16}(x)]$

$= 2\,x\,f_{16}(x) + 16\,f_{16}(x) - x\,f_{16}(x) + 16\,x - x\,f_{16}(x)$

$= 16\,f_{16}(x) + 16\,x = 16\,[f_{16}(x) + x]$

Durch Einsetzen des Terms von $f_{16}(x)$ erhält man für die Fläche F des y-achsensymmetrischen Fünfecks:

$F(x) = 16\left(-\frac{1}{256}\,x^3 + 16 + x\right) = -\frac{1}{16}\,x^3 + 16\,x + 256$

Notwendige Bedingung für extremalen Flächeninhalt: $A'(x) = 0$

$F'(x) = -\frac{3}{16}\,x^2 + 16$

$-\frac{3}{16}\,x_E^2 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{16}\,x_E^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,x_E^2 = 256 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = \pm\sqrt{\frac{256}{3}}$

$\Leftrightarrow \quad x_E = \pm 16\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{16}{3}\sqrt{3} = \pm 5\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx \pm 9{,}24$

Hinreichende Bedingung: $F^{µ}(x) = 0$ s.o. und $F^{¶}(x) \neq 0$

$$F^{¶}(x) = -\frac{6}{16}\,x = -\frac{3}{8}\,x$$

$$F^{¶}(x_E) = A^{¶}\left(\frac{16}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{8}\cdot\frac{16}{3}\cdot\sqrt{3} = -2\cdot\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Berechnung des maximalen Flächeninhaltes

$$F_{max} = -\frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\sqrt{3}\right)^3 + 16\cdot\frac{16}{3}\cdot\sqrt{3} + 256 \approx 354{,}53\ \text{FE}$$

Für $\underline{\underline{x = 5\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 9{,}24}}$ wird der Flächeninhalt des Fünfecks maximal.

Der maximale Flächenunhalt beträgt $\underline{\underline{354{,}53\ \text{FE}}}$.

d)
$$V_{Rot} = 2\pi\int_0^K [f_K(x)]^2\,dx = 2\pi\int_0^K \left(-\frac{1}{K^2}x^3 + K\right)^2 dx$$

$$= 2\pi\int_0^K \left(\frac{1}{K^4}x^6 - \frac{2}{K}x^3 + K^2\right) dx = 2\pi\left[\frac{1}{7K^4}x^7 - \frac{1}{2k}x^4 + K^2x\right]\Bigg|_0^K$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{7}K^3 - \frac{1}{2}K^3 + K^3\right] = \frac{2}{7}K^3\left(\frac{2}{14} - \frac{7}{14} + \frac{14}{14}\right)$$

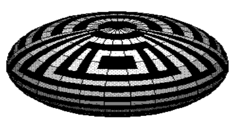
$$= \frac{18}{14}\pi K^3 = \frac{9}{7}\pi K^3 = 1\frac{2}{7}\pi K^3 \approx 4{,}04\,K^3$$

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt $\underline{\underline{V_{Rot} = 1\frac{2}{7}\pi K^3\ \text{VE} \approx 4{,}04\,K^3\ \text{VE}}}$

e) Für K = 7 erhält man:

$$V_{Rot,7} = \frac{9}{7}\cdot\pi\cdot 7^3\ \text{VE} = 9\cdot 49\cdot\pi\ \text{VE} = 441\,\pi\ \text{VE} \approx 1385{,}44\ \text{VE}$$

Für K = 7 erhält man einen Rotationskörper mit dem Volumen
$\underline{\underline{V_{Rot,7} = 441\,\pi\ \text{VE} \approx 1385{,}44\ \text{VE}}}$



f) $A_K \;=\; 2\int_0^K f_K(x)\,dx \;=\; 2\int_0^K \left(-\frac{1}{K^2}x^3 + k\right)dx \;=\; 2\left[-\frac{1}{4K^2}x^4 + Kx\right]\Bigg|_0^K$

$$= \; 2\left(-\frac{1}{4K^2} + K^2\right) \; = \; 1\frac{1}{2}\,K^2$$

Der Flächeninhalt der Fläche A_K, die von den Graphen der Funktionen f_K, g_K und der x-Achse umrandet wird beträgt: $\underline{\underline{A_K = 1\frac{1}{2}K^2}}$

g) $1\frac{2}{7}\pi K^3 \;=\; 1\frac{1}{2}\pi K^2 \;\Rightarrow\; K_1 = K_2 = 0$

$$\frac{9}{7}\pi K \;=\; \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; K = \frac{3\cdot 7}{2\cdot 9\cdot\pi} = \frac{7}{6\cdot\pi} \approx 0{,}371$$

Die Maßzahlen für den Inhalt der Fläche A_K und für das Volumen des Rotationskörpers V_{Rot} stimmen für $\underline{\underline{K = \frac{7}{6\pi} \approx 0{,}371}}$ überein.

h) $F_K(x) \;=\; 2x\,f_K(x) + (k - x)\,f_K(x) + x\,[K - f_K(x)] \;=\; K[f_K(x) + x]$

$$= \; -\frac{1}{K}x^3 + Kx + K^2$$

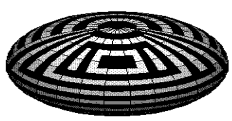
<u>Notwendige Bedingung für maximalen Flächeninhalt:</u> $F_K^{\mu}(x) = 0$

$$F_K^{\mu}(x) \;=\; -\frac{3}{K}x^2 + k$$

$$F_K^{\mu}(x_E) \;=\; -\frac{3}{K}x_E^2 + K = 0 \;\Leftrightarrow\; -3x_E^2 + K^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_E^2 = \frac{K^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\; x_{E,1,2} = \pm K\sqrt{\frac{1}{3}} \;\Leftrightarrow\; x_{E,1,2} = \pm\frac{K}{3}\sqrt{3}$$

$$x_{E,1} = \frac{K}{3}\sqrt{3} \quad\wedge\quad x_{E,2} = -\frac{K}{3}\sqrt{3}$$



Hinreichende Bedingung: $F_K^{\mu}(x) = 0$ s.o. und $F_K^{\P}(x) \neq 0$

$$F_K^{\P}(x) = -\frac{6}{K}x$$

$$F_K^{\P}(x_{E,1}) = F_K^{\P}\left(\frac{K}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{6}{K} \cdot \frac{K}{3} \cdot \sqrt{3} = -2\sqrt{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$F_K^{\P}(x_{E,2}) = F_K^{\P}\left(-\frac{K}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{6}{K} \cdot \left(-\frac{K}{3}\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$F_{K,max} = -\frac{1}{K}\left(\frac{K}{3}\sqrt{3}\right)^3 + \frac{K^2}{3}\sqrt{3} = -\frac{1}{K} \cdot \frac{K^3}{27} \cdot 3\sqrt{3} + \frac{K^2}{3}\sqrt{3} + K^2$$

$$= \frac{2}{9}K^2\sqrt{3} + K^2 = \left(\frac{2}{9}\sqrt{3} + 1\right)K^2 \approx 1{,}385\, k^2$$

Der Flächeninhalt des maximalen Fünfecks beträgt $\underline{1{,}385\, K^2 \text{ FE}}$

Der Flächeninhalt der Fläche A_K beträgt $\underline{1{,}5\, K^2 \text{ FE}}$ (S. Aufgabenteil f)

$$\frac{F_{K,max}}{A_K} = \frac{1{,}385\, K^2 \text{ FE}}{1{,}5\, K^2 \text{ FE}} = \frac{1{,}385}{1{,}5} \approx 0{,}923 = 92{,}3\,\%$$

Das Fünfeck mit maximalem Flächeninhalt nimmt also $\underline{\underline{92{,}3\,\%}}$ der Fläche ein, die von den Graphen der Funktionen g_K, f_K und der x-Achse begrenzt ist.