Klausur Nr. 1 GKM 12

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion zu den folgenden Funktionen !

a) $f(x) = (\sin x)^2 - (\cos x)^2$ **b)** $f(x) = (6x^2 - 5)\sin(2x^3 + 5x)$

c) $f(x) = \left(12x^6 - \frac{4}{x^3}\right)^{21}$ **d)** $f(x) = 4x\sqrt{3x^2 - 8x}$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14$

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Gleichung für die Wendetangente.

Aufgabe 3

Beschreiben Sie das allgemeine Verfahren zur Lösung von Extremwertaufgaben !

Aufgabe 4

Unter allen Kugelabschnitten von gegebener Oberfläche $F = 800\ \text{cm}^2$ soll derjenige mit dem größten Volumen V ermittelt werden.
Bestimmen Sie die Höhe x, den Radius y und das Volumen V des Kugelabschnitts ! Welche besondere Form hat der Kugelabschnitt ?

Formeln: $V(x,y) = \frac{1}{3}\pi x^2 (3y - x)$ $F(x,y) = 2\pi x y$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gleichung der Parabel $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte und die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel und zeichnen Sie die Parabel in ein Koordinatensystem.

b) Im ersten Quadranten liegt der Punkt C auf dem Graphen der Parabel. Der Koordinatenursprung A und der Punkt C sind die Eckpunkte eines Rechtecks. Die beiden anderen Eckpunkte B und D liegen auf den Koordinatenachsen. Zeichnen Sie so ein Rechteck in das Koordinatensystem.

1. Bestimmen Sie die Koordinaten des Eckpunktes C so, dass der Umfang des Rechtecks ABCD maximal wird.

2. Die Konstante 5 in der Funktionsgleichung der Parabel soll durch eine reelle Zahl k ersetzt werden, so dass die Funktionsgleichung für die Parabel nun $f_k(x) = -x^2 + 4x + k$ lautet.

Bestimmen Sie die Konstante $k \in R$ so, dass das Rechteck mit dem maximalen Umfang ein Quadrat ist !

L ö s u n g e n

1a) $f(x) = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = u_1(x)\,v_1(x) - u_2(x)\,v_2(x)$

$u_1(x) = \sin x \qquad u_1'(x) = \cos x \qquad v_1(x) = \sin x \qquad v_1'(x) = \cos x$

$u_2(x) = \cos x \qquad u_2'(x) = -\sin x \qquad v_2'(x) = -\sin x \qquad v_2(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u_1'(x)\,v_1(x) + u_1(x)\,v_1'(x) - [u_2'(x)\,v_2(x) + u_2(x)\,v_2'(x)] \\ &= \cos x \sin x + \sin x \cos x - [-\sin x \cos x + \cos x\,(-\sin x)] \\ &= 2 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos x = \underline{\underline{4 \sin x \cos x}} \end{aligned}$$

1b) $f(x) = (6x^2 + 5) \sin(2x^3 + 5x) = u(x)\,v(x)$

$u(x) = 6x^2 + 5 \qquad u'(x) = 12x$

$v(x) = \sin(2x^3 + 5x) \qquad v'(x) = (6x^2 + 5)\cos(2x^3 + 5x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \\ &= 12x \sin(2x^3 + 5x) + (6x^2 + 5)(6x^2 + 5)\cos(2x^3 + 5x) \\ &= \underline{\underline{12x \sin(2x^3 + 5x) + (6x + 5)^2 \cos(2x^3 + 5x)}} \end{aligned}$$

1c) $f(x) = \left(12x^6 - \dfrac{4}{x^3}\right)^{21} = \left(12x^6 - 4x^{-3}\right)^{21}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 21\left(12x^6 - \frac{4}{x^3}\right)^{20}\left(72x^5 + 12x^{-4}\right) = \\ &= 21\left(12x^6 - \frac{4}{x^3}\right)^{20}\left(72x^5 + \frac{12}{x^4}\right) \\ &= \underline{\underline{252\left(12x^6 - \frac{4}{x^3}\right)^{20}\left(6x^5 + \frac{1}{x^4}\right)}} \end{aligned}$$

1d) $f(x) = 4x\sqrt{3x^2 - 8x} = \sqrt{48x^4 - 128x^3} = \left(48x^4 - 128x^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(48x^4 - 128x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(192x^3 - 384x^2\right) = \frac{192x^3 - 384x^2}{2\sqrt{48x^4 - 128x^2}} \\ &= \frac{192x^3 - 384x^2}{32x\sqrt{3x^2 - 8}} = \frac{6x^2 - 12x}{\sqrt{3x^2 - 8}} = \underline{\underline{\frac{6x\,(x - 2)}{\sqrt{3x^2 - 8}}}} \end{aligned}$$

2a) $f(0) = 14$

Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt $\underline{\underline{S_y\,(0/14)}}$

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14 = 0 \qquad x_{0,1} = 1$ durch Probe

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 - 9x + 14) : (x - 1) = x^2 - 5x - 14 \\
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad -5x^2 - 9x \\
\quad \underline{-5x^2 + 5x} \\
\qquad\quad -14x + 14 \\
\qquad\quad \underline{-14x + 14} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 5x - 14 &= 0 \\
x^2 - 5x &= 14 \\
x^2 - 5x + 6{,}25 &= 20{,}25 \\
x - 2{,}5 &= \pm\ 4{,}5 \\
x_{0,2} &= -2 \\
x_{0,3} &= 7
\end{aligned}
$$

Der Graph von f schneidet die x-Achse in den Punkten $\underline{\underline{S_{x,1}\,(1/0)}}$, $\underline{\underline{S_{x,2}\,(-2/0)}}$ und $\underline{\underline{S_{x,3}\,(7/0)}}$.

2b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 6x^2 - 9x + 14 \\
f'(x) &= 3x^2 - 12x - 9 \\
f''(x) &= 6x - 24 \\
f'''(x) &= 6
\end{aligned}
$$

<u>Notwendige Bedingung für Wendepunkte:</u> $f''(x) = 0$

$6x - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 24 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

<u>Hinreichende Bedingung für Wendepunkte:</u> $f''(x) = 0$ erfüllt s.o.,

$f'(x) \neq 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 - 9 = 48 - 48 - 9 = 9 \neq 0$

Berechnung der y-Koordinate des Wendepunktes

$f(4) = 4^3 + 6 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 14 = 64 - 96 - 36 + 14 = 78 - 132 = -54$

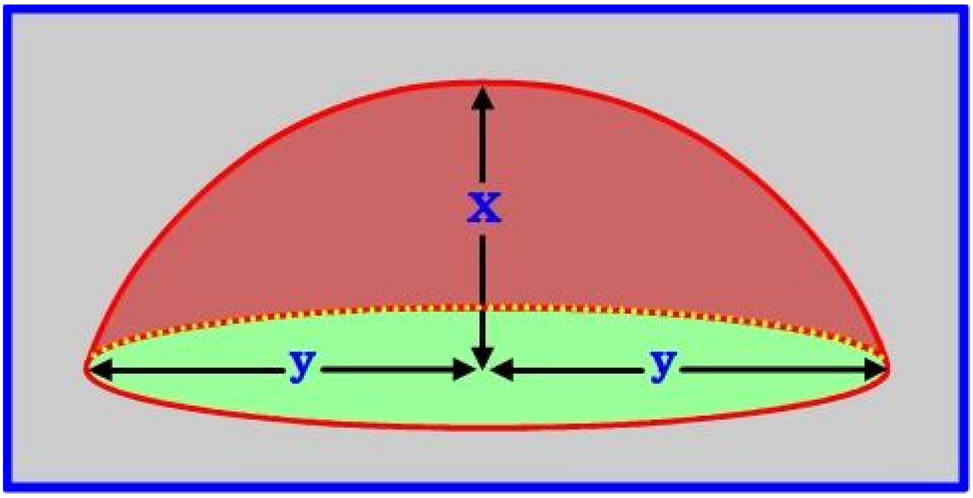
Der Wendepunkt hat die Koordinaten $\underline{\underline{W\,(4/-54)}}$

3) Aufgabenstellung

Eine Größe $Z(a,b)$, die von den beiden Variablen a und b abhängt, soll maximal oder minimal werden. Außerdem ist der Wert einer weiteren Größe $N(a,b)$, die ebenfalls von a und b abhängt und in Zusammenhang mit der Größe $Z(a,b)$ steht, bekannt.

1. Eventuell: Anfertigen einer Skizze mit Beschriftungen.
2. Aufstellen der Funktion $Z(a,b) = ...$ (Hauptbedingung)
3. Aufstellen der Funktion $N(a,b) = ...$ (Nebenbedingung)
4. Auflösen der Nebenbedingung nach einer der beiden Variable.
   (Im Prinzip ist es egal, nach welcher Variablen aufgelöst wird; man sollte sich jedoch für die Variable entscheiden, bei der die weitere Rechnung den geringeren Arbeitsaufwand erfordert. (z.B. Wurzeln vermeiden.)
   Löst man z.B. nach der Variablen b auf, so erhält man eine Gleichung
   $b = f(a)$
5. Einsetzen der aufgelösten Nebenbedingung in die Gleichung für die Größe Z.
   Man erhält nun eine Gleichung für die Größe Z, die nun nur noch von der einen Variablen a abhängt; d.h. $Z(a) = ...$
   Diese Gleichung bezeichnet man als <u>Zielfunktion.</u>
6. Berechnug der ersten und zweiten Ableitung der Funktion $Z(a)$; also
   $Z'(a) = ...$ und $Z''(a) = ...$
7. Notwendige Bedingung für Extrema:
   Bestimmung der Nullstellen a_E der ersten Ableitung der Funktion $Z(a_E)$,
   d.h. Lösen der Gleichung $Z'(a) = 0$
8. Hinreichende Bedingung für Extrema: $Z'(a_E) = 0$ und $Z''(a_E) \neq 0$
   Einsetzen der möglichen Extremwerte in die zweite Ableitung.
   Festellen, ob es einen Extremwert gibt und Bestimmung der Art des Extremums.
   Wenn $Z''(a_E) = 0 \Rightarrow$ Es gibt kein lokales Extremum
   Wenn $Z''(a_E) < 0 \Rightarrow$ Maximum
   Wenn $Z''(a_E) > 0 \Rightarrow$ Minimum
9. Wenn ein Maximum oder Minimum vorliegt:
   Einsetzen des Wertes a_E in die Zielfunktion und berechnung des Extremwertes der Größe Z.
10. Einsetzen des Wertes a_E in die nach b aufgelöste Nebenbedingung (s.3) um auch den Wert der zweiten Variablen b_E zu ermitteln, für den die Größe Z extremal wird.

Skizze zu Aufgabe 4



4) $V(x,y) = \frac{1}{3}\pi x^2 (3y - x)$ Hauptbedingung (*)

$F(x,y) = 2\pi\, x y = 800$ Nebenbedingung

$y = \frac{800}{2\pi x}$ Einsetzen in (*) $\Rightarrow$

$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \left(3 \cdot \frac{800}{2\pi x} - x\right)$ Zielfunktion

$= \frac{1}{3}\pi x^2 \left(\frac{1200}{\pi x} - x\right) = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \frac{1200}{\pi x} - \frac{1}{3}\pi x^3$

$= -\frac{1}{3}\pi x^3 + 400x$

$V'(x) = -\pi x^2 + 400$ $V''(x) = -2\pi x$

Notwendige Bedingung für Extrema: $V'(x) = 0$

$-\pi x^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow \pi x^2 = 400 \Leftrightarrow x^2 = \frac{400}{\pi} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{400}{\pi}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{20}{\pm\sqrt{\pi}}$ Weil x eine Länge ist, gilt nur die positive Wurzel, also

$x = \frac{20}{\sqrt{\pi}} \approx 11{,}284$

Hinreichende Bedingung für Extrema: $V'(x) = 0$ erfüllt s.o.

und $V''(x) \neq 0$

$V''\left(\frac{20}{\sqrt{\pi}}\right) = -2\pi \cdot \frac{20}{\sqrt{\pi}} = -\frac{40\pi}{\sqrt{\pi}} = -40\sqrt{\pi} \approx -22{,}568 < 0 \Rightarrow$ Maximum

Das Volumen des Kugelabschnitts wird für die Höhe $\underline{\underline{x = \frac{20}{\sqrt{\pi}}\ \text{cm}^3 \approx 11{,}284\ \text{cm}^3}}$ maximal.

Berechnung des Maximalvolumens

Durch Einsetzen des Wertes für die maximale Höhe in die Zielfunktion erhält man:

$$V(x) \quad = \quad -\frac{1}{3}\,\pi\left(\frac{20}{\sqrt{\pi}}\right)^3 + 400\,\frac{20}{\sqrt{\pi}} \quad = \quad -\frac{1}{3}\cdot\frac{400}{\pi}\cdot\frac{20}{\sqrt{\pi}} + 400\cdot\frac{20}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \quad -\frac{8000}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} + 8000\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad = \quad 5333\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \approx \quad 3009$$

Das Maximalvolumen des Kugelabschnitts beträgt:

$$\underline{\underline{V_{Max} = 5333\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ cm^3 \approx 3009\ cm^3}}$$

Berechnung des Radius y

Durch Einsetzen des Wertes für die maximale Höhe in die nach y aufgelöste Nebenbedingung erhält man:

$$y \quad = \quad \frac{800}{2\,\pi\cdot\frac{20}{\sqrt{\pi}}} \quad = \quad \frac{800}{40\,\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \quad = \quad \frac{20}{\sqrt{\pi}} \quad \approx \quad 11{,}284$$

Das Volumen des Kugelabschnitts wird für den Radius maximal. $\underline{\underline{y = \frac{20}{\sqrt{\pi}}\ cm^3 \approx 11{,}284\ cm^3}}$

Da Höhe und Radius übereinstimmen, handelt es sich bei dem Kugelabschnitt mit maximalem Volumen bei gegebener Oberfläche um eine $\underline{\underline{\text{H a l b k u g e l}}}$.

5a) Bestimmung des Schnittpunktes mit der y-Achse

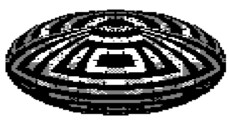
$f(0) = 5 \quad\Rightarrow$

Die Parabel schneidet die x-Achse im Punkt $\underline{\underline{S_y\,(0/5)}}$.

Bestimmung der Schnittpunkte mit der x-Achse

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0\\
x^2 + 4x + 5 &= 0\\
x^2 - 4x &= 5\\
x^2 - 4x + 4 &= 9\\
x - 2 &= \pm 3\\
x_1 &= -1\\
x_2 &= 5
\end{aligned}$$

Die Parabel schneidet die x-Achse in den Punkten $\underline{\underline{S_{x,1}\,(-1/0)}}$ und $\underline{\underline{S_{x,2}\,(5/0)}}$.

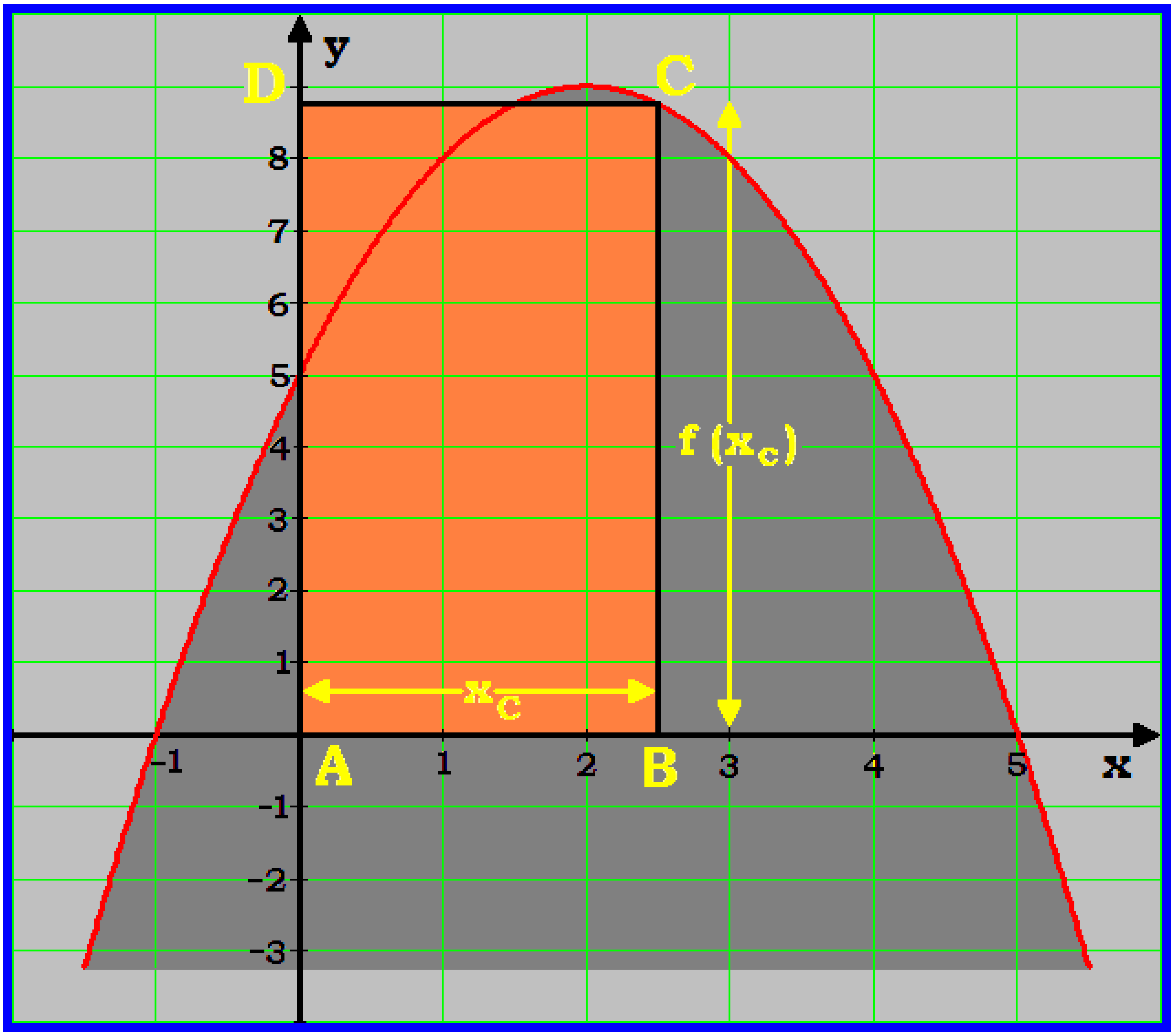


Bestimmung des Scheitelpunktes der Parabel

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5 = -(x^2 - 4x - 5) = -(x^2 - 4x + 4 - 5 - 4)$$
$$= -[(x-2)^2 - 9] = -(x-2)^2 + 9$$

Der Scheitelpunkt der Parabel hat die Koordinaten $\underline{\underline{S\,(2/9)}}$.

Skizze zu Aufgabe 5



5b1) $U(x_C) = 2\,x_C + 2\,f(x_C) = 2\,x_C + 2(-x_C^2 + 4\,x_C + 5) = -2\,x_C^2 + 10\,x_C + 10$

$U'(x_C) = -4\,x_C + 10$

$U''(x_C) = -4$

Notwendige Bedingung für extremalen Umfang: $U'(x_C) = 0$

$4\,x_C + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,x_C = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x_C = 2\frac{1}{2}$

Hinreichende Bedingung für extremalen Umfang:

$U'(x_C) = 0$ erfüllt s.o. und $U''(x_C) \neq 0$

$U''(x_C) = -4 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f(x_C) = f\left(2\frac{1}{2}\right) = -\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot 2\frac{1}{2} + 5 = 6\frac{1}{4} + 10 + 5 = 8\frac{3}{4}$

Für den Punkt $\underline{\underline{C\,(2{,}5/8{,}75)}}$ wird der Umfang des Rechtecks maximal.

$U(x_C) = U(2{,}5) = -2 \cdot 2{,}5^2 + 10 \cdot 2{,}5 + 10 = 12{,}5 + 25 + 10 = 22{,}5$

Der maximale Umfang des Rechtecks beträgt $\underline{\underline{U_{max} = 22{,}5 \text{ LE}}}$.

5b2) $f_k(x_C) = -x_C^2 + 4\,x_C + k$

$U_k(x_C) = 2\,x_C + 2\,f_k(x_C) = 2\,x_C - 2\,x_C^2 + 8\,x_C + 2\,k$

$U_k'(x_C) = -4\,x_C + 10$

$U_k''(x_C) = -4$

Notwendige Bedingung für extremalen Umfang: $U_k'(x_C) = 0$

Da für alle reellen Zahlen k die erste Ableitunge für die Funktion, mit der man den maximalen Umfang berechnet, identisch ist und auch die zweite Ableitung immer den Wert -4 hat, ist die x-Koordinate des Punktes unabhängig von k und beträgt immer 2,5. Damit das Rechteck ein Quadrat ist, muss k so gewählt werden, dass auch die y-Koordinate des Punktes C den Wert 2,5 annimmt.

$f_k(2{,}5) = 2{,}5$

$-2{,}5^2 + 4 \cdot 2{,}5 + k = 2{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad -6{,}25 + 10 + k = 2{,}5$

$\Leftrightarrow \quad 3{,}75 + k = 2{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1{,}25$

Für $\underline{\underline{k = -1{,}25}}$ ist das Rechteck mit dem maximalen Umfang ein Quadrat.