

# Würfelaufgabe

Zwölf Drähte, die alle den gleichen Widerstand von  $1\ \Omega$  haben, sind so angeordnet, dass sie das Kantenmodell eines Würfels bilden.

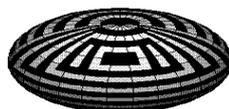
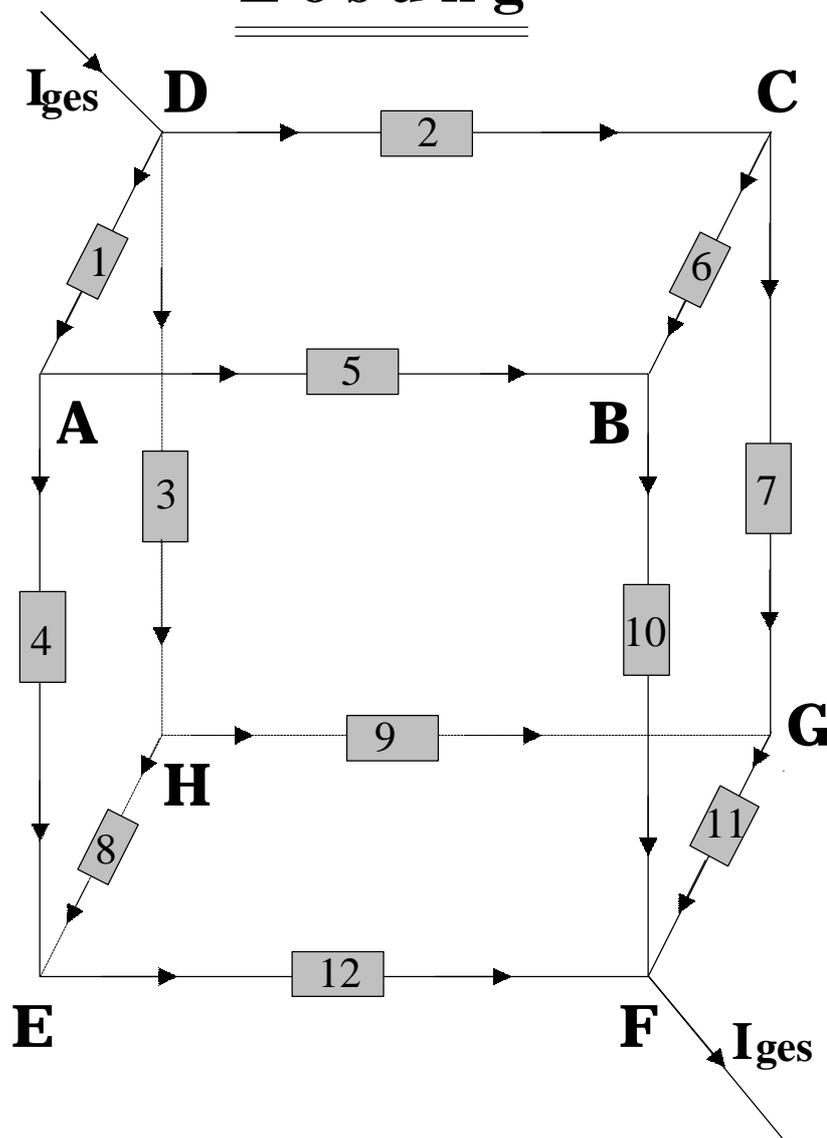
An zwei Ecken dieses Drahtkantenmodells wird eine elektrische Spannung angelegt. Dabei sind die Ecken so gewählt, dass ihre Verbindungslinie eine Raumdiagonale des Würfels darstellt.

a) Fertigen Sie eine Skizze an.

In der Skizze müssen der zufließende Strom zum Würfel, der abfließende Strom vom Würfel sowie die Teilströme innerhalb der zwölf Drähte des Würfels (Drahtkantenmodell des Würfels) mit ihren Richtungen vorhanden sein.

b) Berechnen Sie den Gesamtwiderstand  $R_W$  des Würfels.

## Lösung



An der Ecke D fließt der gesamte Strom mit der Stromstärke  $I_{\text{ges}}$  in den Würfel hinein. Da alle 12 Widerstände gleich groß sind und die gesamte Anordnung symmetrisch ist, fließen vom Verzweigungspunkt A drei gleich große Ströme  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  durch die zugehörigen Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Für die Stromstärken gilt:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{3} I_{\text{ges}}$$

Die Ströme  $I_{10}$ ,  $I_{11}$ ,  $I_{12}$  vereinigen sich im Punkt F am "Ausgang des Würfels" wieder zum Gesamtstrom  $I_{\text{ges}}$ . Aus den gleichen Symmetriegründen gilt auch für diese Ströme:

$$I_{10} = I_{11} = I_{12} = \frac{1}{3} I_{\text{ges}}$$

Der Strom  $I_1$  verzweigt sich im Punkt A in die beiden gleich großen Teilströme  $I_4$  und  $I_5$ . Entsprechend verzweigt sich der Strom  $I_2$  im Punkt C in die beiden gleich großen Teilströme  $I_6$  und  $I_7$  und der Strom  $I_3$  in die beiden gleich großen Teilströme  $I_8$  und  $I_9$ . Für diese 6 Teilströme gilt:

$$I_4 = I_5 = I_6 = I_7 = I_8 = I_9 = \frac{1}{6} I_{\text{ges}}$$

Damit sind die Stärken aller Ströme im Verhältnis zur Gesamtstromstärke  $I_{\text{ges}}$  festgelegt.

Zwischen dem "Eingangspunkt" D des Würfels und dem "Ausgangspunkt" F liegt die Spannung  $U_{\text{DF}}$ . Durch den Würfel mit dem Widerstand  $R_{\text{W}}$  fließt der Strom mit der Stärke  $I_{\text{ges}}$ . Es gilt folglich:

$$R_{\text{W}} = \frac{U_{\text{DF}}}{I_{\text{ges}}} \quad (\alpha)$$

Die Spannung  $U_{\text{DF}}$  zwischen den Punkten D und F ist unabhängig davon auf welchen Weg im Stromkreis ich von D nach F gelange.

Einer dieser Wege wäre z.B. Von D nach A, dann von A nach B und danach von B nach F. Die Spannung  $U_{\text{DF}}$ , die am Würfel anliegt, ist gleich der Summe der Einzelspannungen, die auf den Teilstrecken abfallen.

$$U_{\text{DF}} = U_{\text{DA}} + U_{\text{AB}} + U_{\text{BF}}$$

Ersetzt man die Teilspannungen in dieser Gleichung durch die Produkte aus den Stromstärken und Widerständen, so erhält man:

$$U_{\text{DF}} = I_1 \cdot R_1 + I_5 \cdot R_5 + I_{10} \cdot R_{10}$$

Da alle Widerstände gleich groß sind kann die Indizierung wegfallen und man erhält:

$$U_{\text{DF}} = I_1 \cdot R + I_5 \cdot R + I_{10} \cdot R = (I_1 + I_5 + I_{10}) \cdot R$$



Drückt man die einzelnen Stromstärken in dieser Gleichung durch die Stromstärke  $I_{\text{ges}}$  aus, so folgt:

$$U_{\text{DF}} = \left( \frac{1}{3} I_{\text{ges}} + \frac{1}{6} I_{\text{ges}} + \frac{1}{3} I_{\text{ges}} \right) \cdot R = \frac{5}{6} I_{\text{ges}} \cdot R$$

Einsetzen in die Gleichung ( $\alpha$ ) für den Würfelwiderstand  $R_{\text{W}}$  ergibt:

$$R_{\text{W}} = \frac{U_{\text{DF}}}{I_{\text{ges}}} = \frac{\frac{5}{6} I_{\text{ges}} \cdot R}{I_{\text{ges}}} = \frac{5}{6} R = \frac{5}{6} \cdot 1 \Omega = \frac{5}{6} \Omega$$

Der Widerstand des Würfels beträgt  $R_{\text{W}} = \frac{5}{6} \Omega = 0,8\bar{3} \Omega$ .

