

Brunnenaufgabe

In einem Experiment läßt man einen schweren Stein in einen Brunnen fallen. Mit einer Stoppuhr wird ermittelt, daß der Stein $t_{\text{ges}} = 5 \text{ s}$ nach dem Loslassen am Boden des Brunnens im Wasser aufschlägt.

- a) Berechnen Sie die Fallzeit t_F des Steins.
- b) Berechnen Sie die Brunntiefe s_1 des Brunnens.
- c) Berechnen Sie die Zeit t_s , die der Schall zum "Durchlaufen" des Brunnens benötigt.
- d) Berechnen Sie die Brunntiefe s_2 , die man erhält, wenn man die Laufzeit des Schalls nicht berücksichtigt.
- e) Darf man die Laufzeit des Schalls vernachlässigen, wenn man die Brunntiefe mit einer Genauigkeit von 10% bestimmen will ?

(Berechnen Sie alle Ergebnisse mit einer Genauigkeit von 5 gültigen Stellen)

Konstanten: Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Schallgeschwindigkeit $c = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



Lösung – Brunnenaufgabe

a) $s_1 = \frac{1}{2} g t_F^2$ (α) Weg - Zeit - Gesetz für den fallenden Stein

$s_1 = c \cdot t_s$ (β) Weg - Zeit - Gesetz für den Schall

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$\frac{1}{2} g t_F^2 = c \cdot t_s \quad (\chi)$$

Es gilt: $t_{\text{ges}} = t_s + t_F \Leftrightarrow t_F = t_{\text{ges}} - t_s$ Einsetzen in (χ) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g t_F^2 &= c \cdot (t_{\text{ges}} - t_F) \\ \frac{1}{2} g t_F^2 &= c \cdot t_{\text{ges}} - c \cdot t_F \\ \frac{1}{2} g t_F^2 + c \cdot t_F &= c \cdot t_{\text{ges}} && | : \frac{1}{2} g \\ t_F^2 + \frac{2c}{g} t_F &= \frac{2c}{g} t_{\text{ges}} && \text{quadratische Ergänzung} \\ t_F^2 + \frac{2c}{g} t_F + \left(\frac{c}{g}\right)^2 &= \frac{2c}{g} t_{\text{ges}} + \left(\frac{c}{g}\right)^2 \\ t_F + \frac{c}{g} &= \sqrt{\frac{2c}{g} t_{\text{ges}} + \left(\frac{c}{g}\right)^2} \\ t_F &= -\frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{2c}{g} t_{\text{ges}} + \left(\frac{c}{g}\right)^2} \\ t_{F_{1,2}} &= \frac{330 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \pm \sqrt{\frac{2 \cdot 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot 5 \text{ s} + \left(\frac{330 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right)^2} \\ t_{F_{1,2}} &= -33,639 \text{ s} \pm 38,314 \text{ s} \end{aligned}$$

Nur das Ergebnis für $t_{F_1} := t_F$ mit der positiven Wurzel ist physikalisch sinnvoll, da die Fallzeit positiv und kleiner als 5 s sein muß. Es gilt:

$$t_F = -33,639 \text{ s} + 38,314 \text{ s} = 4,675 \text{ s}$$

Die Fallzeit des Steins beträgt 4,675 s.



b) Durch Einsetzen der Fallzeit $t_F = 4,675 \text{ s}$ in die Gleichung (α) erhält man

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (4,675 \text{ s})^2 = 107,20 \text{ m}$$

Der Brunnen ist 107,20 m tief.

c) $t_s = t_{\text{ges}} - t_F = 5 \text{ s} - 4,675 \text{ s} = 0,325 \text{ s}$

Der Schall benötigt zum "Durchlaufen" des Brunnens 0,325 s.

d) $s_2 = \frac{1}{2} g t_{\text{ges}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5 \text{ s})^2 = 122,625 \text{ m} \approx 122,63 \text{ m}$

Ohne Berücksichtigung der Laufzeit des Schalls wäre der Brunnen 122,63 m tief.

e)

107,20 m	j	100%
1,072 m	j	1%
$122,63 \text{ m} = 114,39 \cdot 1,072 \text{ m}$	j	114,39%

Der Wert für s_2 weicht um 14,39% > 10% vom Wert für s_1 ab.

Die Laufzeit des Schalls darf also bei der Bestimmung der Brunnentiefe nicht vernachlässigt werden.

