K l a u s u r N r. 2 Gk Ph 11

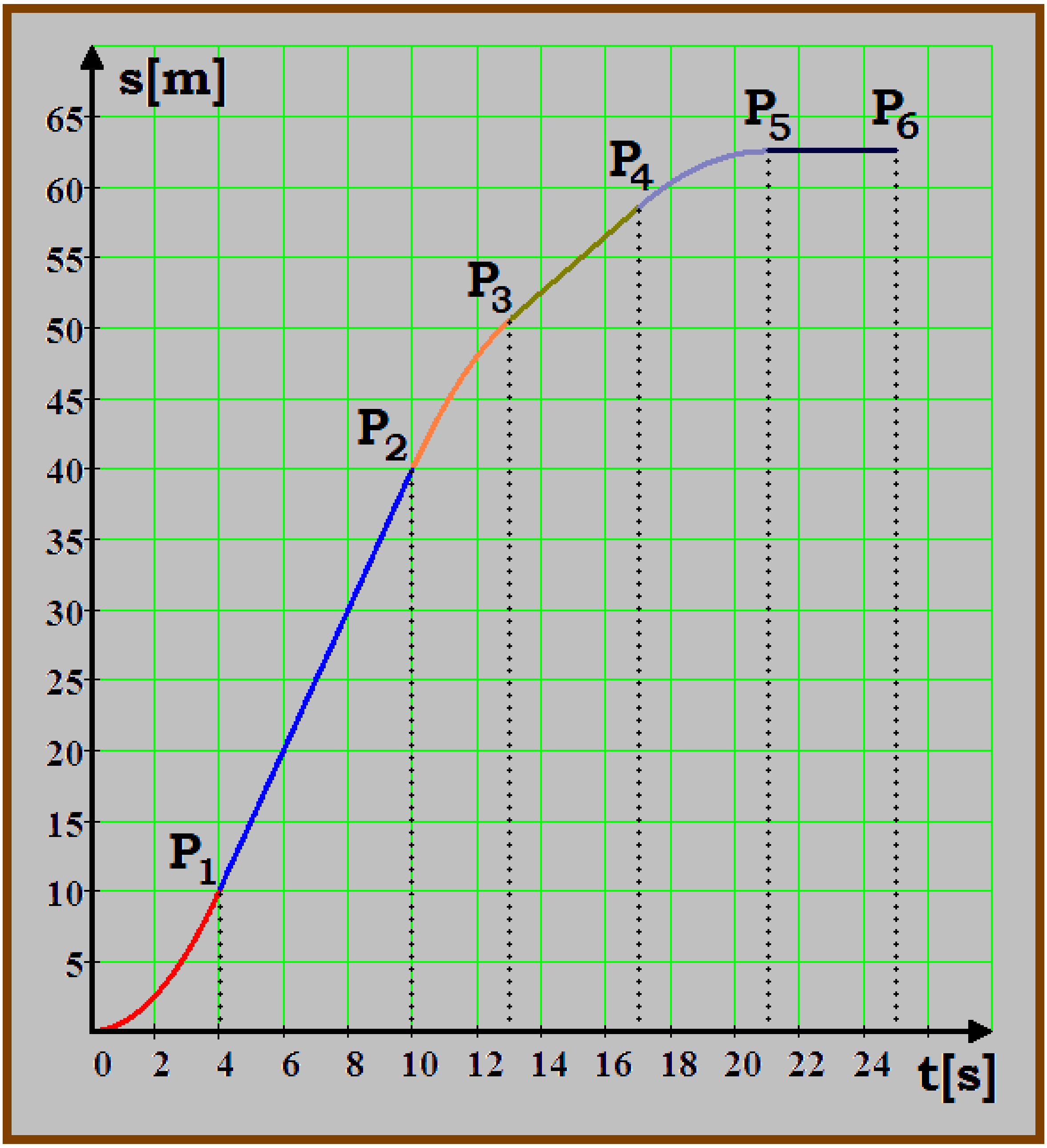
Aufgabe 1

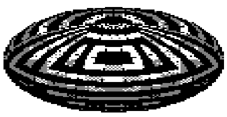
Ein Fahrzeug durchfährt eine überhöhte Kurve, die gegenüber der Horizontalen einen Winkel von 34° hat. Das Fahrzeug wird dabei mit der Kraft $\vec{F}_{ges} = 18000\,\text{N}$ senkrecht auf die Fahrbahn gedrückt.

a) Bestimme die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und die Masse m des Fahrzeugs.

b) Bestimme die Fliehkraft $\vec{F}_{Fl}$, die auf das Fahrzeug wirkt.

Aufgabe 2





Fortsetzung von Aufgabe 2

Das sog. Weg-Zeit-Diagramm gibt den Weg, den ein Fahrzeug zurückgelegt hat, in Abhängigkeit von der Zeit an.
Die Punkte P_1........P_6 im Diagramm haben die folgenden Koordinaten:

$P_1(4\ s/10\ m)$, $P_2(10\ s/40\ m)$, $P_3(13\ s/50{,}5\ m)$, $P_4(17\ s/58{,}5\ m)$, $P_5(21\ s/62{,}5\ m)$ und $P_6(25\ s/62{,}5\ m)$.

Beschreiben Sie die Bewegungen des Fahrzeugs in den sechs einzelnen Zeitintervallen. Geben Sie dabei auch die Beschleunigungen und konstanten Geschwindigkeiten quantitativ an.

Aufgabe 3

Ein Pkw fährt mit der Geschwindigkeit $v = 54\ km/h$ gegen einen Baum. Dabei wird die Frontpartie des Fahrzeugs um $1{,}5\ m$ eingedrückt.
Der Fahrer des Wagens hat die Masse $m = 80\ kg$.

a) Mit welcher Beschleunigung wird der Wagen bei dem Unfall abgebremst.

b) In welcher Zeit wird der Pkw abgebremst ?

c) Wie groß ist die Kraft, die auf den Fahrer bei dem Aufprall wirkt ?

d) Nehmen Sie an, der Fahrer könnte sich mit seinen Armen mit der Kraft $F = 600\ N$ abstützen.
Welche Geschwindigkeit v_{max} darf das Fahrzeug nicht überschreiten, wenn der Fahrer bei sonst gleichen Unfallbedingungen nur durch die Muskelkraft seiner Arme den aufprall seines Körpers gegen das lenkrad und gegen das Amaturenbrett verhindern kann ?

Aufgabe 4

a) Leiten Sie die Gleichung für die Bahnkurve des schiefen Wurfes schräg nach oben her !
Ergänzen Sie die Darstellung Ihrer mathematischen Überlegungen durch geeignete Skizzen und begründenden Text.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Bahnkurve des waagerechten Wurfes sich als "Grenzfall" der Gleichung für den schiefen Wurf darstellen läßt.

Aufgabe 5

Eine Person wirft von einem $25\ m$ hohem Steilufer unter dem Winkel $\alpha = 40°$ (gegen die Horizontale gemessen) einen Stein ins Wasser.
Der Stein trifft in einer Entfernung von $36\ m$ auf die Wasseroberfläche.

a) Berechnen Sie die Abwurfgeschwindigkeit v_0. (Ergebnis: $v_0 = 12{,}791\ \frac{m}{s}$)

b) Berechnen Sie die maximale Höhe, die der Stein während seiner Flugbahn über der Wasseroberfläche hat. (Ergebnis: $h_{max} = 28{,}103\ m$)

c) Wie weit ist der Stein geflogen, wenn er sich nach dem Abwurf wieder in der Höhe von $25\ m$ über dem Wasser befindet ?

d) Berechnen Sie die gesamte Flugdauer T des Steins. (Ergebnis: $T = 4{,}379\ s$)

e) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit, mit der der Stein auf der Wasseroberfläche aufschlägt.

f) Unter welchem Winkel α trifft der Stein auf die Wasseroberfläche ?

L ö s u n g e n

Aufgabe 1

a) Der Zeichnung entnimmt man:

$$F_G = F_{ges} \cdot \cos\alpha = 18000\,\mathrm{N} \cdot \cos 34° \approx 14923\,\mathrm{N}$$

Die Gewichtskraft des Fahrzeugs beträgt $\underline{\underline{F_G = 14923\,\mathrm{N}}}$.

$$F_G = m \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{F_G}{g} = \frac{14923\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} \approx 1521\,\mathrm{kg}$$

Das Fahrzeug hat die Masse $\underline{\underline{m = 1521\,\mathrm{kg}}}$.

b) Der Zeichnung entnimmt man:

$$F_{Fl} = F_{ges} \cdot \sin\alpha = 18000\,\mathrm{N} \cdot \sin 34° \approx 10065\,\mathrm{N}$$

Auf das Fahrzeug wirkt die Fliehkraft $\underline{\underline{F_{Fl} = 10065\,\mathrm{N}}}$.

Aufgabe 2

Im Zeitintervall von 0 bis 4 s führt das Fahrzeug aus dem Stand heraus eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus. da es in dieser Zeit die Strecke $s = 10\,\mathrm{m}$ zurücktlegt, ist seine Beschleunigung $a_1 = \frac{2\,s_1}{(\Delta\,t_1)^2} = \frac{20\,\mathrm{m}}{16\,\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{1{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$.

das Fahrteug bewegt sich nun im zweiten Zeitintervall, das von 4 s bis 10 s geht, mit der konstanten Geschwindigkeit weiter, die es am Ende der Beschleunigungsphase zur Zeit $t = 4\,\mathrm{s}$ erreicht hat. Diese Geschwindigkeit v_2 beträgt: $v_2 = \frac{40\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s} - 4\,\mathrm{s}} = \frac{30\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$.

Im dritten Zeitintervall von 10 s bis 12 s bremst das Fahrzeug von der Geschwindigkeit $v_2 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf die Geschwindigkeit $v_4 = \frac{58{,}5\,\mathrm{m} - 50{,}5\,\mathrm{m}}{17\,\mathrm{s} - 13\,\mathrm{s}} = \frac{8\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$ ab, die es im vierten Zeitintervall, das von 16,5 s bis 20,5 sbeibehält.

Für die Bremsbeschleunigung im dritten Zeitintervall gilt:

$$a_3 = \frac{v_4 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{17\,\mathrm{s} - 13\,\mathrm{s}} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}.$$

Fortsetzung von Aufgabe 2

Im fünften Zeitintervall, d.h. von 17 s bis 21 s bremst das Fahrzeug von der Geschwindigkeit $v_4 = 2\,\frac{m}{s}$ bis zum Stand ab. es legt in diesem Zeitintervall den Weg $s_5 = 62{,}5\text{ m} - 58{,}5\text{ m} = 4\text{ m}$ zurück.
die Bremsbeschleunigung a_5 beträgt folglich:

$$a_5 = -\frac{2\,s_5}{(\Delta t_5)^2} = -\frac{2 \cdot 4\text{ m}}{(21\text{ s} - 17\text{ s})^2} = -\frac{8\text{ m}}{(4\text{ s})^2} = -\frac{8\text{ m}}{16\text{ s}^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\,\frac{m}{s^2}}}.$$

Im sechsten Zeitintervall von 21 s bis 25 s <u>b l e i b t d a s F a h r z e u g s t e h e n</u>.

Aufgabe 3

a) $v = 54\text{ km/h} = \frac{54}{3{,}6}\,\frac{m}{s} = 15\,\frac{m}{s}$

$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 \quad (*)$

$v = a \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v}{a}$ Durch Einsetzen in $(*)$ erhält man:

$$s = \frac{1}{2}\,a\,\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2\,a} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,a\,s = v^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{v^2}{2\,s} = \frac{(15\,\frac{m}{s})^2}{2 \cdot 1{,}5\text{ m}} = \frac{225\,\frac{m^2}{s^2}}{3\text{ m}} = 75\,\frac{m}{s^2}$$

Das Fahrzeug wird mit der Bremsbeschleunigung $\underline{\underline{a = 75\,\frac{m}{s^2}}}$ gestoppt.

b) $v = a \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v}{a} = \frac{15\,\frac{m}{s}}{75\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}2\text{ s}$

Der Pkw wird in der Zeit $\underline{\underline{t = 0{,}2\text{ s}}}$ abgebremst.

c) $F = m \cdot a = 80\text{ kg} \cdot 75\,\frac{m}{s^2} = 6000\text{ N}$

Auf den Fahrer wirkt die Kraft $\underline{\underline{F = 6000\text{ N}}}$.

d) $F = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{F}{m} = \frac{600\text{ N}}{80\text{ kg}} = 7{,}5\,\frac{m}{s^2}$

$v = a \cdot t \quad (*)$

$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\,s}{a}}$ Durch Einsetzen in $(*)$ erhält man:

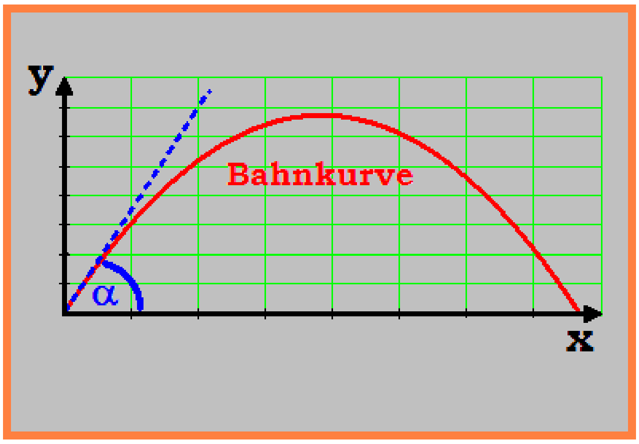
Fortsetzung von Aufgabe 3d

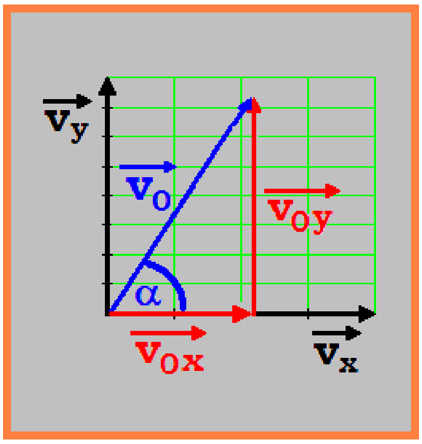
$$v = a\sqrt{\frac{2\,s}{a}} = \sqrt{2\,a\,s} = \sqrt{2 \cdot 7{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}5\,m} = \sqrt{22{,}5\,\frac{m^2}{s^2}} \approx 4{,}74\,\frac{m}{s}$$

$$v \approx 17\,km/h$$

Das Fahrzeug darf höchstens mit der Geschwindigkeit $\underline{\underline{v = 17\,km/h}}$ fahren, damit der Fahrer sich noch abstützen kann.

Aufgabe 4





a) Ein Körper K wird aus Bodenhöhe vom Punkt P (0/0) (Koordinatenursprung) mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α (gegen die Horizontale gemessen) schräg nach oben abgeschossen.
Im folgenden wird die Bewegung des Körpers in mehrere Teilbewegungen zerlegt, die sich alle ungestört überlagern.
Die Bewegung des schiefen Wurfes nach oben besteht aus einer geradlinigen Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 schräg nach oben, die von der gleichmäßig beschleunigten Bewegung des freien Falls, die nach unten gerichtet ist, überlagert wird.
Die geradlinige Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 läßt sich in zwei weitere Bewegungen zerlegen, und zwar in eine geradlinige Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ in Richtung der positiven x-Achse nach rechts und in eine geradlinige Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ in Richtung der positiven y-Achse nach oben.
Insgesamt läßt sich also der schiefe Wurf nach oben in drei Teilbewegungen zerlegen. Für diese drei Bewegungen gelten die Weg-Zeit-Gesetze

1) $x = v_0\,t \cos\alpha$ in Richtung der positiven x-Achse nach rechts

2) $y = v_0\,t \sin\alpha$ in Richtung der positiven y-Achse nach oben

3) $y = \frac{1}{2}\,g\,t^2$ in Richtung der negativen y-Achse nach unten

Fortsetzung von Aufgabe 4

Da die beiden Teilbewegungen 2) und 3) entlang der y-Achse entgegen-gerichtet sind, kann man sie durch Subtraktion zu einer Bewegung zusammenfassen, so dass man nun zur Beschreibung des schiefen Wurfes nach oben nur noch zwei Bewegungen benötigt und zwar eine Bewegung entlang der x-Achse und eine Bewegung entlang der y-Achse. Man erhält die beiden Weg-Zeit-Gesetze

$x = v_0\, t \cos\alpha \quad (*)$ und $\quad y = v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \quad (**)$

Löst man die Gleichung (∗) nach t auf, so erhält man:

$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ Einsetzen dieses Term für t in die Gleichung (∗∗) ein ergibt:

$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2$ Durch Umformen erhält man:

$$y = x \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2$$

Mit der Beziehung $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ erhält man die endgültige Formel für die Gleichung der Bahnkurve des schiefen Wurfes nach oben.

$$\mathbf{y = x \tan\alpha - \frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2}$$

b) Der waagerechte Wurf ergibt sich als Grenzfall des schiefen Wurfes, wenn man den Winkel $\alpha = 0°$ einsetzt.

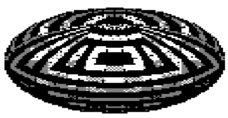
$$y = x \tan 0° - \frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2 0°} \cdot x^2$$

es gilt: $\tan 0° = 0$ und $\cos 0° = 1$

Durch Einsetzen dieser Bedingungen in die Gleichung für die Bahnkurve des schiefen Wurfes erhält man:

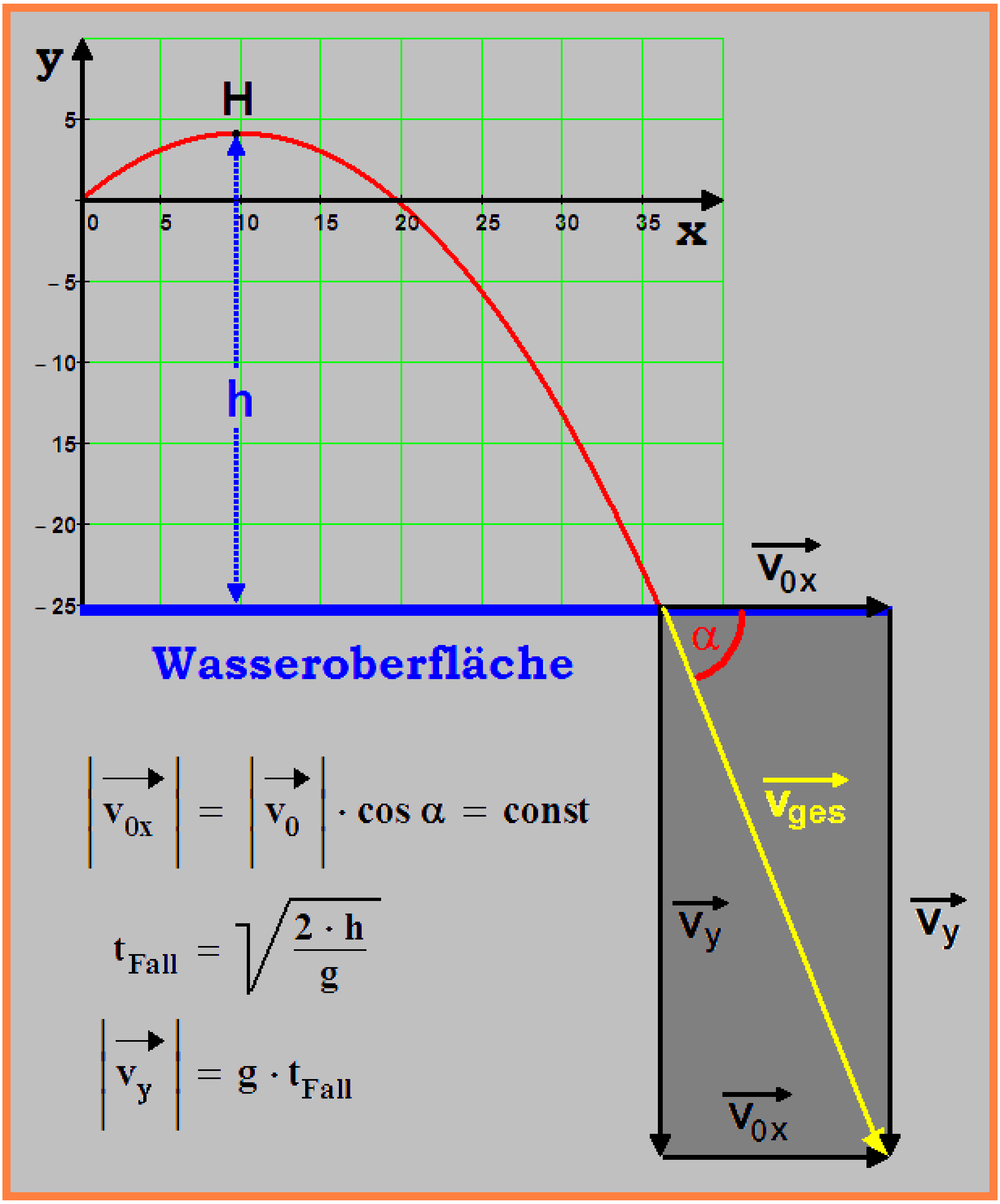
$$y = -\frac{g}{2\, v_0^2} \cdot x^2$$

Dies ist die Gleichung für die Bahnkurve des waagerechten Wurfes.



Aufgabe 5

In den folgenden Rechnngen lege ich den Abwurfort A des Steins in den Ursprung eines Koordinatensystems; also $A(0/0)$. Dies bedeutet, dass der Punkt T, in dem der Stein auf die Wasseroberfläche trifft, die Koordinaten $T(36/-25)$ hat.



Fortsetzung von Aufgabe 5

a)

$$y = x \tan\alpha - \frac{g}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$y - x\tan\alpha = -\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$v_0^2\,(y - x\tan\alpha) = -\frac{g\,x^2}{2\cos^2\alpha} \quad \Leftrightarrow$$

$$v_0^2 = \frac{g\,x^2}{2\cos^2\alpha\,(x\tan\alpha - y)} \quad \Rightarrow$$

$$v_0 = \frac{x}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(x\tan\alpha - y)}}$$

$$v_0 = \frac{36\text{ m}}{\cos 40°}\sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2(36\text{ m}\cdot\tan 40° - (-25\text{ m})}}$$

$$v_0 = 14{,}00775891\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Stein wird der Geschwindigkeit $\underline{\underline{v_0 = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$ abgeworfen.

b) Im Hochpunkt der Flugbahn ist die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung gleich Null; d.h.

$$v_y = v_0\sin\alpha - g\,t_A = 0$$

Dabei ist t_A die Anstiegszeit, d.h. die Zeit, die vom Abwurf des Steins bis zum erreichen des höchsten Punktes H vergeht.

Durch Auflösen der Gleichung nach t_A erhält man:

$$t_A = \frac{v_0\sin\alpha}{g} = \frac{14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,\sin 40°}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}917\text{ s}$$

Damit erhält man für die y-Koordinate des Hochpunktes H (bezogen auf den Abwurfort A(0/0))

$$y_H = v_0\,t_A\sin\alpha - \frac{1}{2}\,g\,t_A^2 = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 0{,}917\text{ s}\cdot\sin 40° - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(0{,}917\text{ s})^2$$

$$y_H = 4{,}128\text{ m}$$

Da der Abwurfort 25 m über der Wasseroberfläche liegt, erreicht der Stein die maximale Höhe $\underline{\underline{h_{max} = 29{,}128\text{ m}}}$ bezogen auf die Wasseroberfläche.

c) $y = x\tan\alpha - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2$

Da der Abwurfort in den Ursprung des kootrdinatensystems gelegt wurde, hat der Punkt P, in dem der Stein wieder 25 m über der Wasseroberfläche ist, die y-Koordinate Null. Es ist also die Gleichung

$x\tan\alpha - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 = 0$ zu lösen.

Fortsetzung von Aufgabe 5 c

$$\left(\tan\alpha - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x\right)x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0$$

Dieses Ergebnis gilt für den Abwurfort des Steins.
Für das zweite Ergebnis der quadratischen Gleichung gilt:

$$\tan\alpha - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}\,x = \tan\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2\,v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g} = \frac{2\cdot(14\,\frac{m}{s})^2\cdot\cos^2 40°\cdot\tan 40°}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 19{,}676\text{ m}$$

Der Stein ist $\underline{\underline{19{,}676\text{ m}}}$ weit geflogen, wenn er sich wieder 25 m hoch über dem Wasser befindet.

d) Sei T die gesamte Flugdauer und x_{ges} die gesamte Wurfweite von 36 m. Dann gilt:

$$x_{ges} = v_0\,T\cos\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{x_{ges}}{v_0\cos\alpha} = \frac{36\text{ m}}{14\,\frac{m}{s}\cdot\cos 40°} = 3{,}357\text{ s}$$

Die gesamte Flugdauer des Steine beträgt $\underline{\underline{T = 3{,}357\text{ s}}}$.

e) $\vec{v}_{ges} = \vec{v}_y + \vec{v}_{0x}$ s. Zeichnung

$$h = \frac{1}{2}\,g\,t_{Fall}^2$$

$$t_{Fall} = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 29{,}128\text{ m}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} \approx 2{,}437\text{ s}$$

$$v_y = g\cdot t_{Fall} = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 2{,}437\text{ s} \approx 23{,}907\,\frac{m}{s}$$

$$v_{0x} = v_0\cos\alpha = 14\,\frac{m}{s}\cdot\cos 40° \approx 10{,}725\,\frac{m}{s}$$

$$v_{ges}^2 = v_{0x}^2 + v_y^2 \quad \Rightarrow \quad v_{ges} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2}$$

$$v_{ges} = \sqrt{(10{,}725\,\tfrac{m}{s})^2 + (23{,}907\,\tfrac{m}{s})^2} \approx 26{,}202\,\frac{m}{s}$$

Der Stein trifft mit der Geschwindigkeit $\underline{\underline{v_{ges} = 26{,}202\,\frac{m}{s}}}$ auf die Wasseroberfläche.

Fortsetzung von Aufgabe 5 e

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_{0x}} \qquad \text{s. Zeichnung}$$

$$\tan\alpha = \frac{23{,}907\ \frac{m}{s}}{10{,}725\ \frac{m}{s}} = 2{,}229090909 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 65{,}838°$$

Der Stein trifft unter dem Winkel $\underline{\underline{\alpha = 65{,}838°}}$ auf die Wasseroberfläche.