2.11.2010

Klausur Nr. 1 Gk Ph 12

Aufgabe 1

Leiten Sie die Formel für die Schwingungsdauer einen schwingenden Flüssigkeit in einem U-Rohr her.
Zeigen Sie zunächst, dass diese Schwingung harmonisch ist.
Benutzen Sie dann für die weitere Herleitung die allgemeine Formel für die Schwingungsdauer einer harmonischen Schwingung $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$.
Ergänzen Sie die mathematische Darstellung Ihrer Überlegungen durch geeignete Zeichnungen und begründen Text.

Aufgabe 2

Der Pendelkörper eines Fadenpendels hat die Masse $m = 2{,}5\ \text{kg}$. Das Fadenpendel wird um die Strecke $s_{max} = 12\ \text{cm}$ ausgelenkt und dann losgelassen. Man stellt fest, dass der Pendelkörper die Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit $v_{max} = 0{,}28\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ passiert.

a) Berechnen Sie die Energie W_{ges} der Schwingung.

b) Um welche Höhe h wurde die Pendelmasse bei ihrer Auslenkung angehoben ? Runden Sie auf volle Millimeter.

c) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T und die Pendellänge für diese Schwingung.

d) 1) Bei welcher Amplitude sind die Bewegungsenergie und die Lageenergie des Pendelkörpers gleich groß ? (Ergebnis: $s = 8{,}49\ \text{cm}$)
2) Zu welcher Zeit, nachdem der Pendelkörper die Gleichgewichtslage passiert hat, ist dies zum ersten mal der Fall ?

e) Berechnen Sie die Rückstellkraft und die Beschleunigung der Pendelschwingung in den Umkehrpunkten.

Aufgabe 3

Die Flüssigkeitssäule in einem U-Rohr hat die Gesamtlänge $l = 90\ \text{cm}$.
Die Querschnittsfläche A des U-Rohrs beträgt $A = 1{,}6\ \text{cm}^2$. Im Rohr befindet sich Glycerol mit der Dichte $\rho = 1{,}2\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
Man pustet an einer Seite in das U-Rohr und bringt die Flüssigkeit auf diese Weise zum Schwingen. Dabei beträgt die maximale Amplitude $s_{max} = 5\ \text{cm}$.

a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T.

b) Berechnen Sie die Energie W_{ges} der Schwingung.

c) Um welchen Faktor würde sich die in Aufgabenteil b) berechnete Energie W_{ges} verändern, wenn man die Querschnittsfläche A des Rohres halbiert und die maximale Amplitude verdreifacht ?

Aufgabe 4

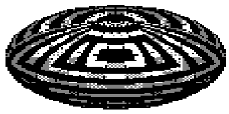
Die Schwingungsdauer eines Federpendels beträgt $T = 1{,}5\ \mathrm{s}$. Die Feder hat die Konstante $D = 32\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

a) Bestimmen Sie die Masse des schwingenden Körpers.
(Ergebnis: $m = 1{,}824\ \mathrm{kg}$)

b) Wie ändert sich die Schwingungsdauer, wenn man im Versuch die gleiche Feder benutzt, aber einen Schwingkörper der vierfachen Masse verwendet ?

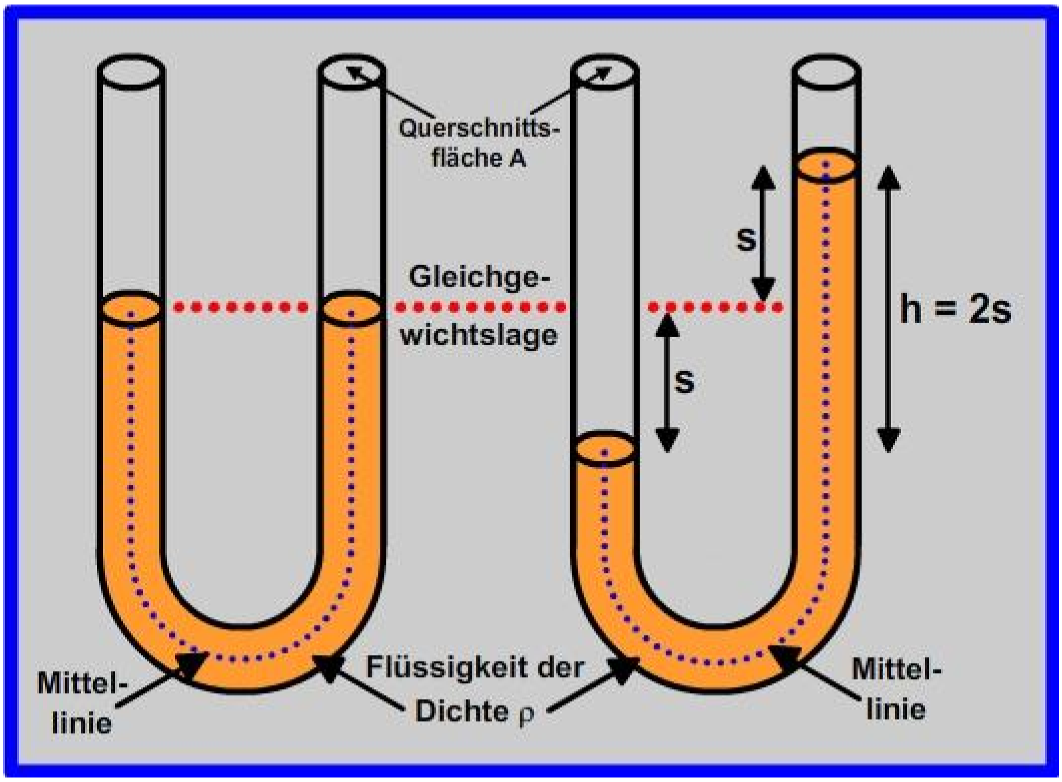
c) Berechnen Sie die Länge eines Fadenpendels, das ebenfalls $T = 1{,}5\ \mathrm{s}$ für eine volle Schwingung benötigt.
Wie ändert sich bei diesem Fadenpendel die Schwingungsdauer, wenn man die vierfache Pendelmasse verwendet ?

d) Welche Änderung muss man an dem oben beschriebenen Fadenpendel vornehmen, damit sich seine Schwingungsdauer verdoppelt ?



L ö s u n g e n

Aufgabe 1



Für eine harmonische Schwingung gilt die Thomson Formel für die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$.

Eine Schwingung ist dann harmonisch, wenn für die Rückstellkraft ein lineares Kraftgesetzt gilt.

Die Rückstellkraft F_R der U-Rohrschwingung ist identisch mit der Gewichtskraft $F_{G,S}$ der überstehenden Flüssigkeitssäule der Höhe $h = 2\,s$. Dabei ist s die Amplitude der Schwingung (s. Zeichnung). Es gilt:

$F_R = F_{G,S} = m_s \cdot g$ mit $m_S = \rho \cdot V_S$ folgt

$F_R = \rho \cdot V_s \cdot g$ mit $V_S = 2 \cdot A \cdot s$ folgt

$F_R = 2 \cdot \rho \cdot A \cdot s \cdot g = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot A \cdot s$

Da der Faktor 2, die Dichte der Füssigkeit ρ, der Erdfaktor g und die Querschnittsfläche A konstant sind, ist auch das Podukt dieser vier konstanten Faktoren ebenfalls konstant. Dieses Produkt wird mit D bezeichnet.

Für die Rückstellkraft gilt dann: $F_R = D \cdot s$ mit $D = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot A = \text{const}$

Da die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung s ist, liegt ein lineares Kraftgesetz vor; d.h. die Schwingung ist harmonisch.

Für die gesamte Masse m_{ges} der Flüssigkeit im U-Rohr gilt:

$m_{ges} = \rho \cdot V_{ges} = \rho \cdot A \cdot l$

Dabei ist l die Länge der Mittellinie. (s. Zeichnung)

Fortsetzung von Aufgabe 1

Durch Einsetzen des Terms für die Konstante D und des Terms für die Gesamtmasse m_{ges} in die Thomson Formel für die Schwingungsdauer einer harmonischen Schwingung erhält man:

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot l}{2 \cdot \rho \cdot g \cdot A}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}}$$

Die Formel für die Schwingungsdauer einer Flüssigsäule in einem U-Rohr lautet: $\underline{\underline{T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}}}}$

Aufgabe 2

a) $W_{ges} = \frac{1}{2}\, m \cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}28\ \frac{m}{s})^2 = 0{,}098\ \mathrm{J}$

Die Gesamtenergie der Schwingung beträgt $\underline{\underline{W_{ges} = 0{,}098\ \mathrm{J}}}$.

b) Aus dem Energieerhaltungssatz folgt:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{max}^2 \quad \Leftrightarrow \quad g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v_{max}^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{max}^2}{g}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}28^2\ \frac{m^2}{s^2}}{9{,}81\ \frac{m}{s^2}} \approx 0{,}003995\ \mathrm{m} \approx 0{,}004\ \mathrm{m} = 4\ \mathrm{mm}$$

Die Pendelmasse wurde bei ihrer Auslenkung um die Höhe $\underline{\underline{h = 4\ \mathrm{mm}}}$ angehoben.

c) $v(t) = \omega\, s_{max} \cos \omega\, t$

$$v_{max} = \omega\, s_{max} = \frac{2\,\pi}{T}\, s_{max} \quad \Leftrightarrow \quad T \cdot v_{max} = 2\,\pi \cdot s_{max} \quad \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{2\,\pi \cdot s_{max}}{v_{max}} = \frac{2\,\pi \cdot 0{,}12\ \mathrm{m}}{0{,}28\ \frac{m}{s}} \approx 2{,}69\ \mathrm{s}$$

Die Dauer der Pendelschwingung beträgt $\underline{\underline{T = 2{,}69\ \mathrm{s}}}$.

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = 4\,\pi^2 \cdot \frac{l}{g} \quad \Leftrightarrow$$

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4\,\pi^2} = \frac{(2{,}69\ \mathrm{s})^2 \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2}}{4\,\pi^2} \approx 1{,}798\ \mathrm{m} \approx 1{,}8\ \mathrm{m}$$

Die Pendellänge beträgt $\underline{\underline{l = 1{,}8\ \mathrm{m}}}$.

d) 1) Wenn Bewegungsenergie und potentielle Energie gleich groß sind, ist die potentielle Energie halb so groß wie die Gesamtenergie der Schwingung. Die Gesamtenergie der Schwingung ist genau so groß wie die maximale potentielle Energie. Es gilt also:

Fortsetzung von Aufgabe 2 d

$$\frac{1}{2}\,D\,s^2 \;=\; \frac{1}{2}\,W_{ges} \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot D\,s_{max}^2$$

$$D\,s^2 \;=\; \frac{1}{2}\,D\,s_{max}^2 \quad\Rightarrow\quad s^2 \;=\; \frac{1}{2}\,s_{max}^2 \quad\Rightarrow$$

$$s \;=\; s_{max}\sqrt{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{1}{2}\,s_{max}\sqrt{2} \;=\; \frac{1}{2}\cdot 0{,}12\text{ m}\cdot\sqrt{2} \;\approx\; 8{,}49\text{ cm}$$

Die potentielle Energie und die Bewegungsenergie des Pendels sind bei der Amplitude $\underline{\underline{s = 8{,}49\text{ cm}}}$ gleich groß.

d) 2) $s \;=\; s_{max}\sin\omega t \quad\Leftrightarrow\quad \sin\omega t \;=\; \frac{s}{s_{max}} \quad\Leftrightarrow\quad \omega t \;=\; \arcsin\frac{s}{s_{max}} \quad\Leftrightarrow$

$$t \;=\; \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{s}{s_{max}} \;=\; \frac{T}{2\pi}\arcsin\frac{s}{s_{max}} \;=\; \frac{2{,}69\text{ s}}{2\pi}\cdot\arcsin\left(\frac{0{,}0849\text{ m}}{0{,}12\text{ m}}\right) \;\approx\; 0{,}336\text{ s}$$

Die potentielle Energie ist zur Zeit $\underline{\underline{t = 0{,}336\text{ s}}}$ genau so groß wie die Bewegungsenergie der Schwingung.

e) $F_R = \frac{m\cdot g}{l}\cdot s_{max} = \frac{2{,}5\text{ kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1{,}8\text{ m}}\cdot 0{,}12\text{ m}$

$F_R = 1{,}635\text{ N}$

Die Rückstellkraft beträgt im Umkehrpunkt $\underline{\underline{F_R = 1{,}635\text{ N}}}$.

$$F_{max} = F_R = m\cdot a_{max} \quad\Leftrightarrow\quad a_{max} = \frac{F_{max}}{m} = \frac{1{,}635\text{ N}}{2{,}5\text{ kg}} = 0{,}654\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Beschleunigung beträgt in den Umkehrpunkten $\underline{\underline{a_{max} = 0{,}654\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

Aufgabe 3

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2\,g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}9\text{ m}}{2\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1{,}3457\text{ s}$

Die Schwingungsdauer der U-Rohr-Schwingung beträgt $\underline{\underline{T = 1{,}3457\text{ s}}}$.

b) $W_{ges} = \frac{1}{2}\,D\,s_{max}^2$ mit $D = 2\,\rho\,g\,A$ folgt

$$W_{ges} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\rho\cdot g\cdot A\cdot s_{max}^2 = \rho\cdot g\cdot A\cdot s_{max}^2$$

$$W_{ges} = 1200\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-4}\text{ m}^2\cdot(0{,}05\text{ m})^2 = 4{,}7088\cdot 10^{-3}\text{ J} = 4{,}7088\text{ mJ}$$

Die Gesamtenergie der Schwingung beträgt $\underline{\underline{W_{ges} = 4{,}7088\text{ mJ}}}$.

Aufgabe 3 c

c) $W_{ges,vorher} = \rho \cdot g \cdot A \cdot s_{max}^2$ bei halber Fläche A und 3-facher Amplitude s_{max} erhält man für die Gesamtenergie nachher:

$$W_{ges,nachher} = \rho \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot A \cdot (3 \cdot s_{max})^2 = \rho \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot A \cdot 9 \cdot s_{max}^2 = 4{,}5 \cdot \rho \cdot g \cdot s_{max}^2$$

$$\frac{W_{ges,\,nachher}}{W_{ges\,,vorher}} = \frac{4{,}5 \cdot \rho \cdot g \cdot A \cdot s_{max}^2}{\rho \cdot g \cdot A \cdot s_{max}^2} = 4{,}5$$

Die Gesamtenergie der Schwingung wird 4,5 mal so groß.

Aufgabe 4

a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi^2 \cdot \frac{m}{D} = T^2 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{T^2 \cdot D}{4\pi^2}$

$$m = \frac{(1{,}5\ \mathrm{s})^2 \cdot 32\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{4\pi^2} = 1{,}824\ \mathrm{kg}$$

Die Masse des Pendelkörpers beträgt $m = 1{,}824\ \mathrm{kg}$.

b) $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{D}}$

$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{D}}$ mit $m_2 = 4\, m_1$ folgt

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{4\, m_1}{D}} = 2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{D}} = 2\, T_1$$

Die Schwingungsdauer verdoppelt sich.

c) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g} \quad \Leftrightarrow \quad l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$

$$l = \frac{(1{,}55\ \mathrm{s})^2 \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4\pi^2} = 0{,}559\ \mathrm{m} = 55{,}9\ \mathrm{cm}$$

Das Fadenpendel hat die Länge $l = 55{,}9\ \mathrm{cm}$.

Die Masse kommt in der Formel für die Schwingungsdauer eines Fadenpendels nicht vor. Da die Schwingungsdauer des Fadenpendels unabhängig von der Masse des Pendelkörpers ist, bleibt sie bei jeder Änderung der Masse erhalten, d.h.natürlich auch bei einer Vervierfachung der Masse. Die Schwingungsdauer ändert sich nicht.

d) Man müsste die Pendellänge vervierfachen.

$4 \cdot 55{,}9\ \mathrm{cm} = 2{,}236\ \mathrm{m} \approx 2{,}24\ \mathrm{m}$

Die Pendellänge l steht nämlich in der Formel für die Schwingungsdauer unter der Wurzel.

Ein Fadenpendel mit der Schwingungsdauer $T = 3\ \mathrm{s}$ hat eine Länge von $l = 2{,}24\ \mathrm{m}$.