Kombination von Widerständen

Aufgabe 1

a) In einem Experimentierkasten sind die Widerstände $R_a = 2\,\Omega$, $R_b = 3\,\Omega$ und $R_c = 5\,\Omega$ vorhanden.

Bestimme alle Widerstände, die man durch Kombinationen aus zwei oder drei dieser Widerstände erhält. Runde, wenn nötig, auf drei Stellen nach dem Komma.

Ordne unter Einbeziehung der drei Einzelwiderstände R_a, R_b und R_c <u>alle</u> zur Verfügung stehenden <u>verschiedenen</u> Widerstände der Größe nach und nummeriere sie vom kleinsten Widerstand bis zum größten Widerstand durch.
Bezeichne dabei den kleinsten Widerstand mit R_1, den nächst folgenden mit R_2 u.s.w.

Wie viele verschiedene Widerstände stehen insgesamt zur Verfügung ?

b) Zu einer der Schaltungen, die aus einer Kombination der drei Widerstände R_a, R_b und R_c besteht, wird noch ein vierter Widerstand $R_c = 3{,}75\,\Omega$ hinzu geschaltet. Man erhält für diese Schaltung den Gesamtwiderstand $R_{ges} = 1{,}5\,\Omega$.

Zeichne für diese Schaltung einen Schaltplan und kontrolliere das Ergebnis durch Rechnung.

Aufgabe 2

a) Die vier Widerstände R_a, R_b, R_c und R_d sind parallel geschaltet. Dabei beträgt $R_a = 400\,\Omega$ und $R_b = 1600\,\Omega$.

Das Verhältnis der Widerstände R_c und R_c ist: $R_c : R_d = 2 : 3$.

Die Parallelschaltung hat den Gesamtwiderstand $R_{ges} = 192\,\Omega$

Berechne die Größe der Widerstände R_c und R_d.

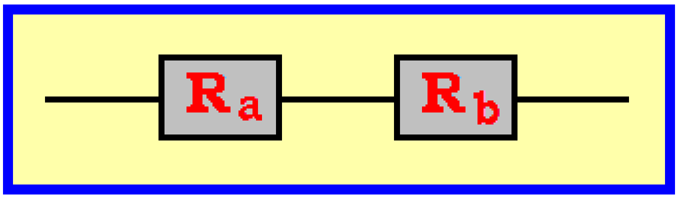
b) Gegeben sind 8 gleich große Einzelwiderstände, die alle den Wert $4\,\Omega$ haben.
Schalte diese 7 Widerstände so zusammen, dass der Gesamtwiderstand der Schaltung $R_{ges} = 11\,\Omega$ beträgt.

Zeichne für die Schaltung einen Schaltplan und kontrolliere das Ergebnis durch Rechnung.

L ö s u n g e n

Aufgabe 1 a

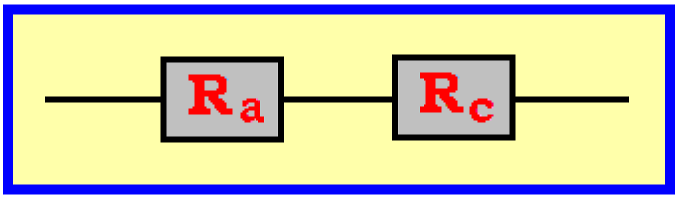
1)



$$R_{ges} = R_a + R_b = 2\,\Omega + 3\,\Omega = \underline{\underline{5\,\Omega}}$$

---

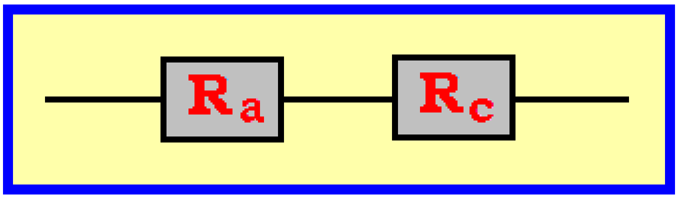
2)



$$R_{ges} = R_a + R_c = 2\,\Omega + 5\,\Omega = \underline{\underline{7\,\Omega}}$$

---

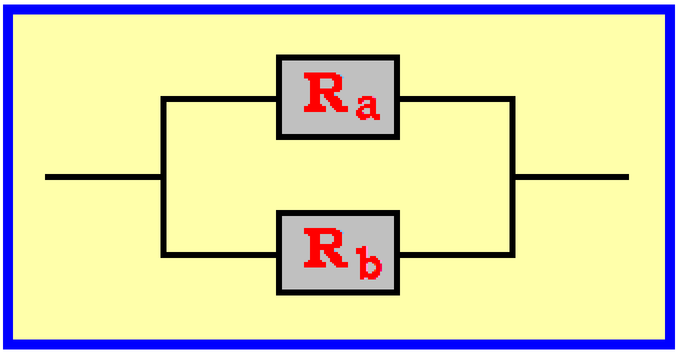
3)



$$R_{ges} = R_b + R_c = 3\,\Omega + 5\,\Omega = \underline{\underline{8\,\Omega}}$$

---

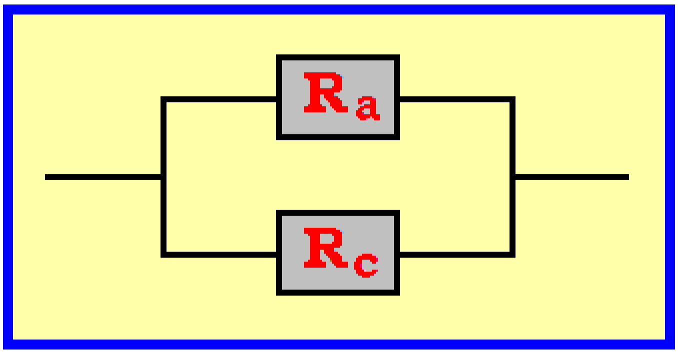
4)



$$R_{ges} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b} = \frac{2\,\Omega \cdot 3\,\Omega}{2\,\Omega + 3\,\Omega} = \frac{6\,\Omega^2}{5\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}2\,\Omega}}$$

---

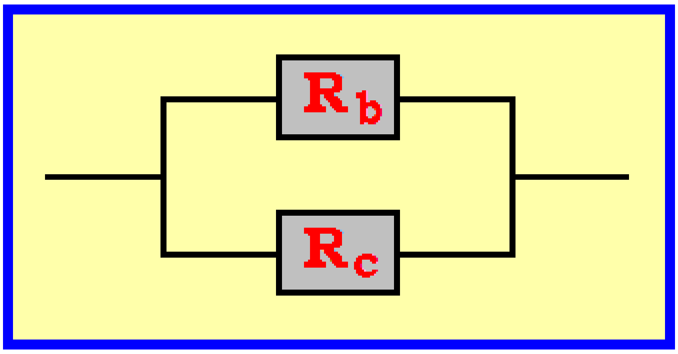
5)



$$R_{ges} = \frac{R_a \cdot R_c}{R_a + R_c} = \frac{2\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{2\,\Omega + 5\,\Omega} = \frac{10\,\Omega^2}{7\,\Omega} = 1\frac{3}{7}\,\Omega \approx \underline{\underline{1{,}429\,\Omega}}$$

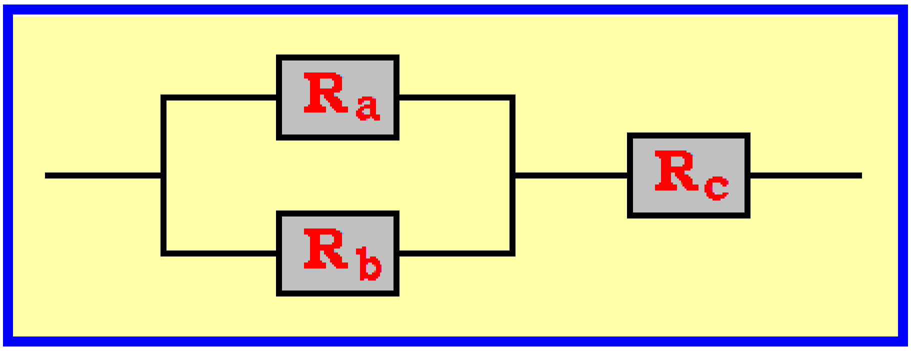
---

6)



$$R_{ges} = \frac{R_b \cdot R_c}{R_b + R_c} = \frac{3\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{3\,\Omega + 5\,\Omega} = \frac{15\,\Omega^2}{8\,\Omega} = 1\frac{7}{8}\,\Omega = \underline{\underline{1{,}875\,\Omega}}$$

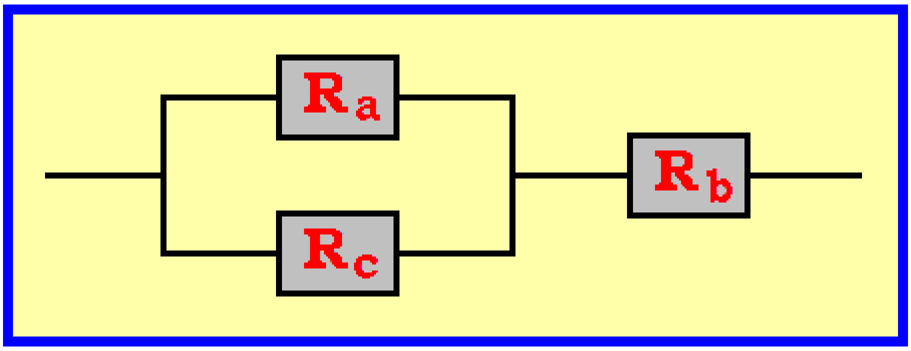
7)



$$R_{ges} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b} + R_c = \frac{2\,\Omega \cdot 3\,\Omega}{2\,\Omega + 3\,\Omega} + 5\,\Omega = 1{,}2\,\Omega + 5\,\Omega = \underline{\underline{6{,}2\,\Omega}}$$

---

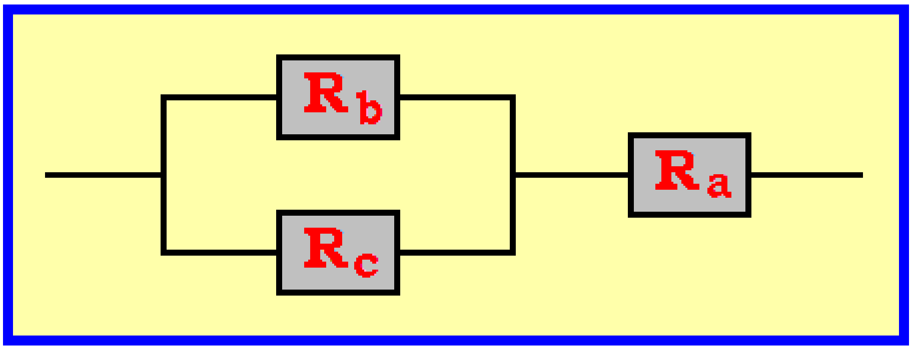
8)



$$R_{ges} = \frac{R_a \cdot R_c}{R_a + R_c} + R_b = \frac{2\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{2\,\Omega + 5\,\Omega} + 3\,\Omega = 1\frac{3}{7}\,\Omega + 3\,\Omega = 4\frac{3}{7}\,\Omega \approx \underline{\underline{4{,}429\,\Omega}}$$

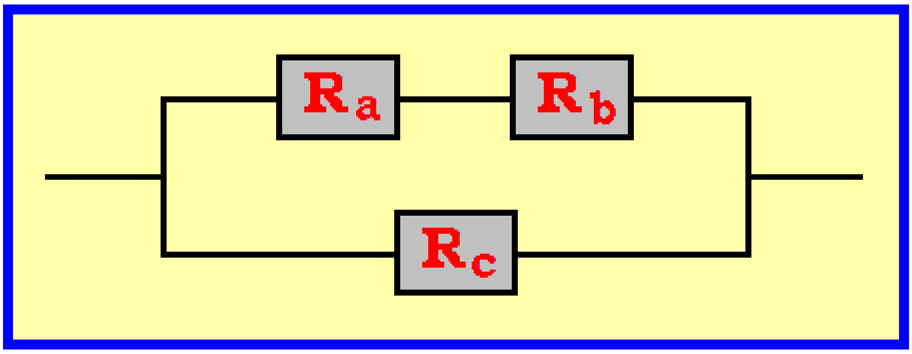
---

9)



$$R_{ges} = \frac{R_b \cdot R_c}{R_b + R_c} + R_a = \frac{3\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{3\,\Omega + 5\,\Omega} + 2\,\Omega = 1\frac{7}{8}\,\Omega + 2\,\Omega = 3\frac{7}{8}\,\Omega = \underline{\underline{3{,}875\,\Omega}}$$

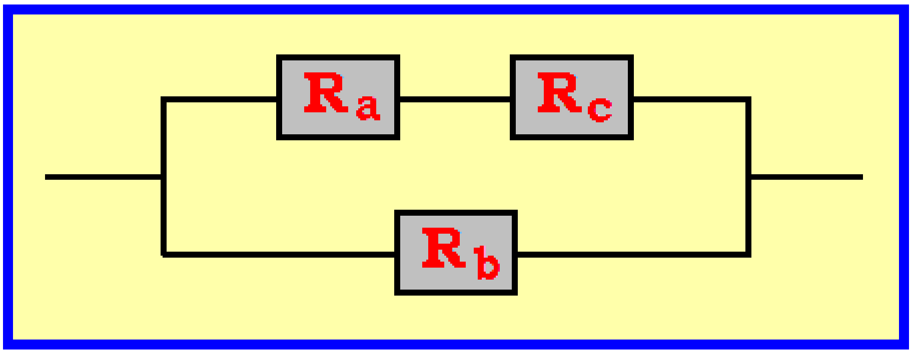
10)



$$R_{ges} = \frac{(R_a + R_b) \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{(2\,\Omega + 3\,\Omega) \cdot 5\,\Omega}{2\,\Omega + 3\,\Omega + 5\,\Omega} = \frac{5\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{10\,\Omega} = \frac{25\,\Omega^2}{10\,\Omega} = \underline{\underline{2{,}5\,\Omega}}$$

---

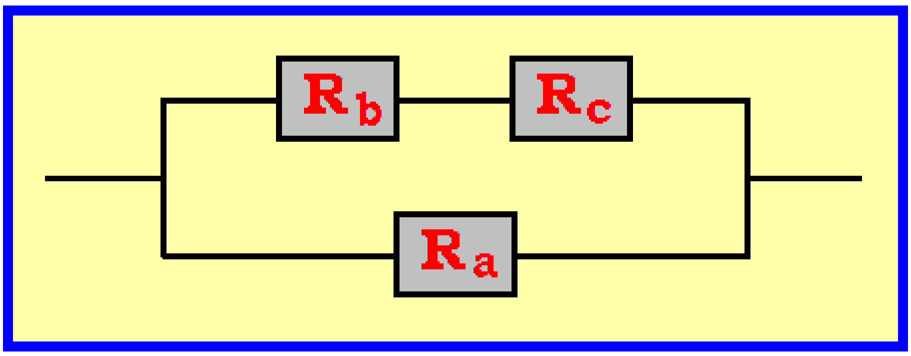
11)



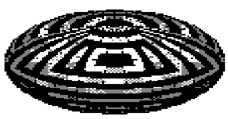
$$R_{ges} = \frac{(R_a + R_c) \cdot R_b}{R_a + R_c + R_b} = \frac{(2\,\Omega + 5\,\Omega) \cdot 3\,\Omega}{2\,\Omega + 5\,\Omega + 3\Omega} = \frac{10\,\Omega \cdot 3\,\Omega}{10\,\Omega} = \frac{30\,\Omega^2}{10\,\Omega} = \underline{\underline{3\,\Omega}}$$

---

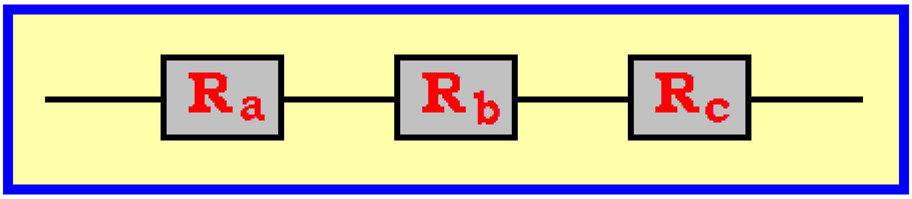
12)



$$R_{ges} = \frac{(R_b + R_c) \cdot R_a}{R_b + R_c + R_a} = \frac{(3\,\Omega + 5\Omega) \cdot 2\,\Omega}{3\,\Omega + 5\,\Omega + 2\,\Omega} = \frac{8\,\Omega \cdot 2\,\Omega}{10\,\Omega} = \frac{16\,\Omega^2}{10\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}6\,\Omega}}$$



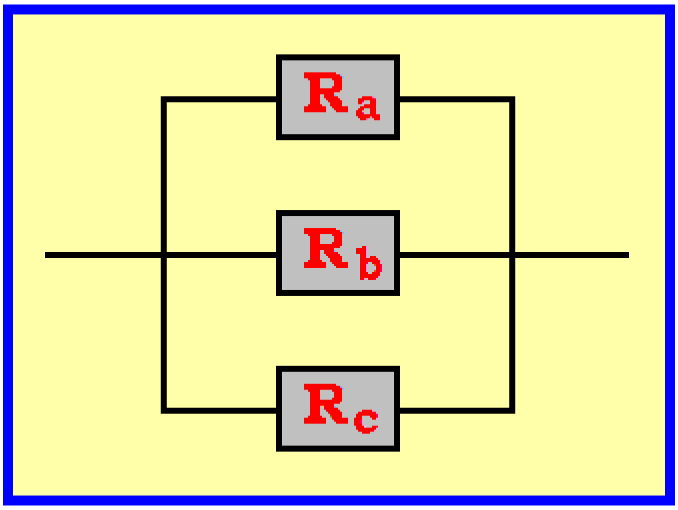
13)



$$R_{ges} = R_a + R_b + R_c = 2\,\Omega + 3\,\Omega + 5\,\Omega = \underline{\underline{10\,\Omega}}$$

---

14)



$$R_{ges} = \frac{R_a \cdot R_b \cdot R_c}{R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c} = \frac{2\,\Omega \cdot 3\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{2\,\Omega \cdot 3\,\Omega + 2\,\Omega \cdot 5\Omega + 3\,\Omega \cdot 5\,\Omega}$$

$$= \frac{30\,\Omega^{3}}{6\,\Omega^{2} + 10\,\Omega^{2} + 15\,\Omega^{2}} = \frac{30\,\Omega^{3}}{31\,\Omega^{2}} = \frac{30}{31}\,\Omega \approx \underline{\underline{0{,}968\,\Omega}}$$

Zählt man zu diesen 14 Kombinationen noch die gegebenen Einzelwiderstände R_a, R_b und R_c noch hinzu, so erhält man insgesamt 17 Möglichkeiten. Da aber der 3 Ω-Widerstand 3-mal und der 5 Ω-Widerstand 2-mal vorkommen, beträgt die Anzahl n der verschiedenen Widerstände $\underline{\underline{n = 14}}$.

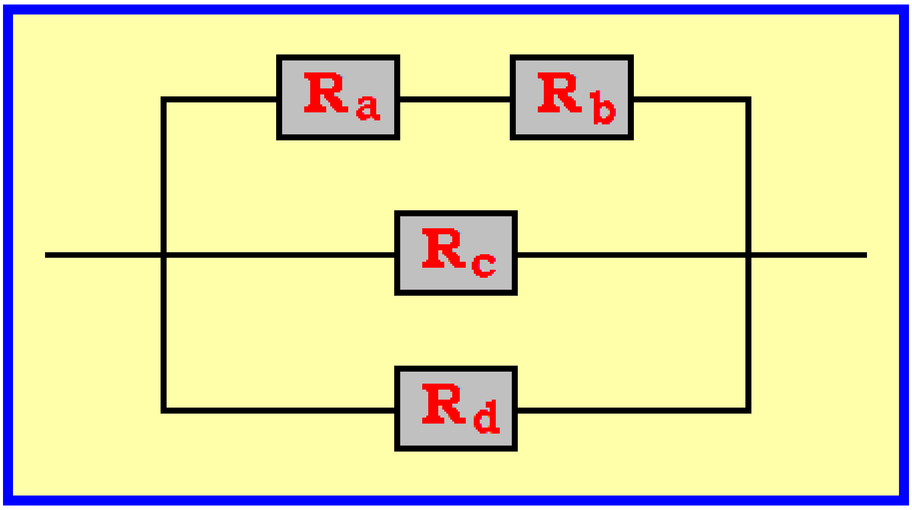
Diese 14 verschiedenen Widerstände sind der Größe nach geordnet:

$\underline{\underline{R_1 = 0{,}968\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_2 = 1{,}2\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_3 = 1{,}429\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_4 = 1{,}6\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_5 = 1{,}875\,\Omega}}$

$\underline{\underline{R_6 = 2\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_7 = 2{,}5\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_8 = 3\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_9 = 3{,}875\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_{10} = 5\,\Omega}}$

$\underline{\underline{R_{11} = 6{,}2\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_{12} = 7\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_{13} = 8\,\Omega}}$, $\underline{\underline{R_{14} = 10\,\Omega}}$

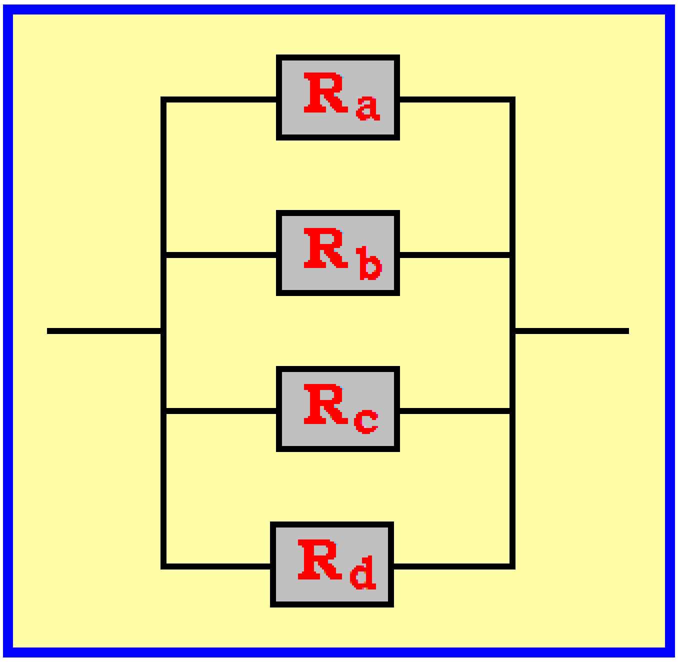
Aufgabe 1b



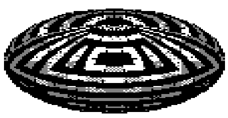
$$R_{a,b,c} = \frac{(R_a + R_b) \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{(2\,\Omega + 3\,\Omega) \cdot 5\,\Omega}{2\,\Omega + 3\,\Omega + 5\,\Omega} = \frac{5\,\Omega \cdot 5\,\Omega}{10\,\Omega} = \frac{25\,\Omega^2}{10\,\Omega} = 2{,}5\,\Omega$$

$$R_{ges} = \frac{R_{a,b,c} \cdot R_d}{R_{a,b,c} + R_d} = \frac{2{,}5\,\Omega \cdot 3{,}75\,\Omega}{2{,}5\,\Omega + 3{,}75\,\Omega} = \frac{9{,}375\,\Omega^2}{6{,}25\,\Omega} = \underline{\underline{1{,}5\,\Omega}} \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 2 a

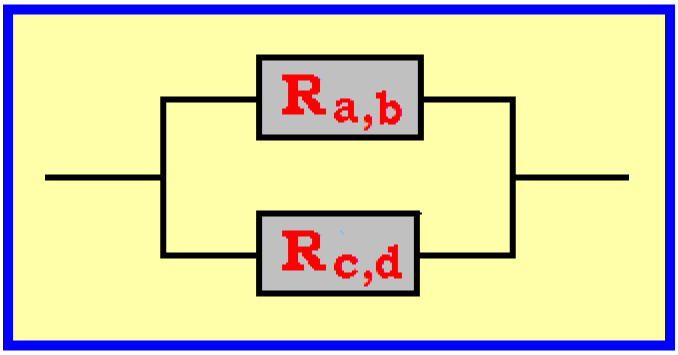


$$R_{a,b} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b} = \frac{400\,\Omega \cdot 1600\,\Omega}{400\,\Omega + 1600\,\Omega} = \frac{640000\,\Omega^2}{2000\,\Omega} = 320\,\Omega$$



Fortsetzung von Aufgabe 2 a

Schaltskizze mit Ersatzwiderständen



$$R_{ges} = \frac{R_{a,b} \cdot R_{c,d}}{R_{a,b} + R_{c,d}} \quad \Leftrightarrow \quad R_{ges} \cdot (R_{a,b} + R_{c,d}) = R_{a,b} \cdot R_{c,d}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{ges} \cdot R_{a,b} + R_{ges} \cdot R_{c,d} = R_{a,b} \cdot R_{c,d}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{ges} \cdot R_{c,d} - R_{a,b} \cdot R_{c,d} = -R_{ges} \cdot R_{a,b}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{c,d}\,(R_{a,b} - R_{ges}) = R_{ges} \cdot R_{a,b}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{c,d} = \frac{R_{ges} \cdot R_{a,b}}{R_{a,b} - R_{ges}}$$

$$R_{c,d} = \frac{192\ \Omega \cdot 320\ \Omega}{320\ \Omega - 192\ \Omega} = \frac{61440\ \Omega^2}{128\ \Omega} = 480\ \Omega$$

$$R_{c,d} = \frac{R_c \cdot R_d}{R_c + R_d} \quad (*) \qquad \text{Mit } R_c : R_d = 2 : 3 \quad \Rightarrow$$

$R_d = 1{,}5\ R_c$ Einsetzen in Gleichung $(*)$ ergibt:

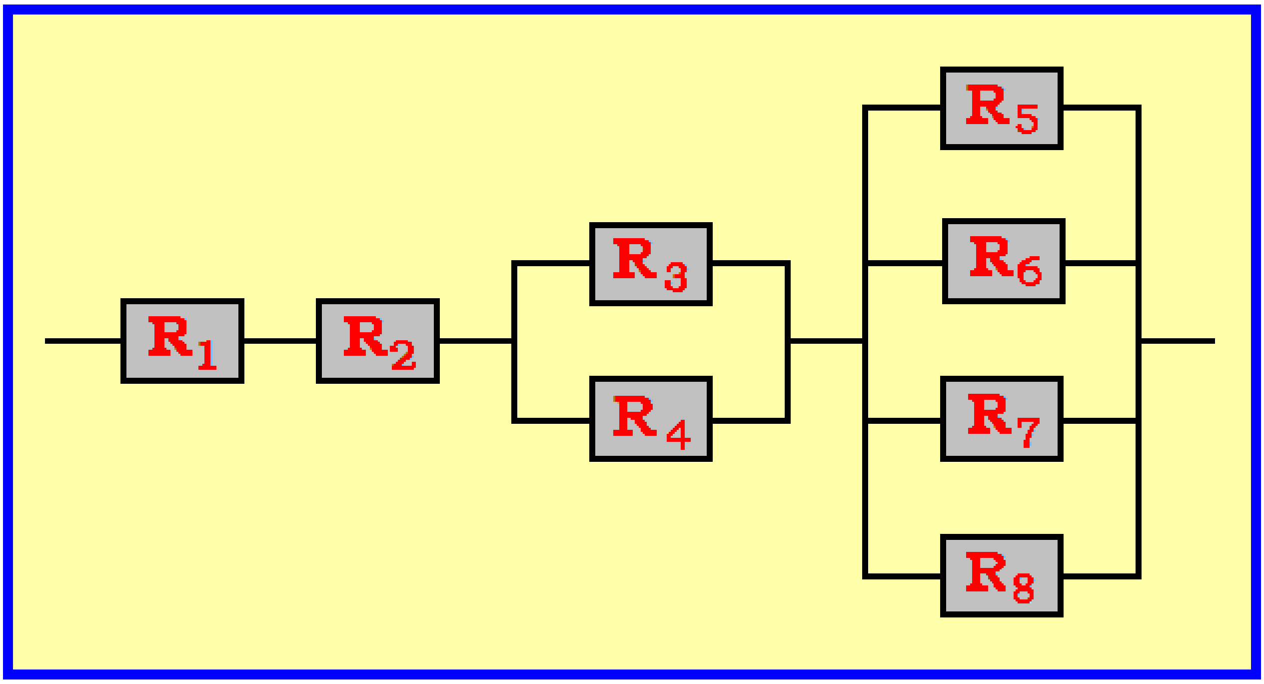
$$R_{c,d} = \frac{R_c \cdot 1{,}5\ R_c}{R_c + 1{,}5\ R_c} = \frac{1{,}5\ R_c^2}{2{,}5\ R_c} = 0{,}6\ R_c \quad \Leftrightarrow$$

$$R_c = \frac{1}{0{,}6}\ R_{c,d} = 1\tfrac{2}{3}\ R_{c,d} = 1\tfrac{2}{3} \cdot 480\ \Omega = 800\ \Omega$$

$$R_d = 1{,}5\ R_c = 1{,}5 \cdot 800\ \Omega = 1200\ \Omega$$

Die Widerstände R_c und R_d haben die Größen: $\underline{\underline{R_c = 800\ \Omega}}$ und $\underline{\underline{R_d = 1200\ \Omega}}$

Aufgabe 2 b



Mit $R_1 = R_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = R_8 = 4\,\Omega$ folgt

$$R_{1,2} = 4\,\Omega + 4\,\Omega = 8\,\Omega$$

$$R_{3,4} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{4\,\Omega \cdot 4\,\Omega}{4\,\Omega + 4\,\Omega} = 2\,\Omega = R_{5,6} = R_{7,8}$$

$$R_{5,6,7,8} = \frac{R_{5,6} \cdot R_{7,8}}{R_{5,6} + R_{7,8}} = \frac{2\,\Omega \cdot 2\,\Omega}{2\,\Omega + 2\,\Omega} = 1\,\Omega$$

$$R_{ges} = R_{1,2} + R_{3,4} + R_{5,6,7,8} = 8\,\Omega + 2\,\Omega + 1\,\Omega = \underline{\underline{11\,\Omega}}$$